拓扑与流形

郭震　曾宪祖　编著

云南科技出版社



TUOPU YU LIUXING



ISBN 7-5416-1596-X /O · 58
定价：20.00 元

拓扑与流形

郭　震　曾宪祖　编著

（云南师范大学自编教材出版基金资助项目）

云南科技出版社

图书在版编目(CIP)数据

拓扑与流形/郭震,曾宪祖编著.—昆明:云南科技出版社,2002.2

ISBN 7-5416-1596-X

Ⅰ.拓... Ⅱ.①郭...②曾... Ⅲ.①拓扑空间—基础理论②流形—基础理论 Ⅳ.O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第082854号

书　　名:拓扑与流形
　　　　Tuopu yu Liuxing
作　　者:郭　震　曾宪祖
出 版 者:云南科技出版社(昆明市环城西路609号云南新闻出版大楼,邮编:650034)
责任编辑:刘　康　吴　涯
封面设计:杨　峻
责任校对:叶　红
责任印制:翟　苑
印 刷 者:昆明市五华区教委印刷厂
发 行 者:云南科技出版社
开　　本:787毫米×1092毫米　1/32
印　　张:8.25
字　　数:205千
版　　次:2002年2月第1版
印　　次:2002年2月第1次印刷
印　　数:0001~1050册
书　　号:ISBN 7-5416-1596-X/O·58
定　　价:20.00元
若发现印装错误请与承印厂联系

内容简介

本书介绍拓扑空间、微分流形的基本内容以及代数拓扑的初步知识，是一本大范围分析和现代微分几何的入门书，内容包括：集论初步、拓扑空间、微分流形、张量、外微分、基本群和同调群简介等。

此书可作为综合大学、高等师范院校数学专业和理论物理专业本科生和研究生教材，也可供有关科技人员参考。

序　言

与古典数学相比，近代数学已走出了数集的范围，而在抽象的集合中讨论数学问题。对集合赋予它一个拓扑结构，使它成为一个拓扑空间，可讨论连续问题。对拓扑空间赋予它一个微分结构，使它成为微分流形，就可在其中讨论微分和积分等问题。

经典数学在研究空间的局部性质方面已经有了成熟的理论和方法，而近代数学发展的主流方向之一是研究空间的大范围性质。经典的分析学研究的只是定义在欧氏空间或其开子集上的内容，而大范围分析及整体几何研究的对象是建立在称之为流形的基础之上的。因此，现代数学很多专门方向都以拓扑与流形为基础，都或多或少地使用流形论的语言，而且越是近代的内容涉及拓扑与流形论的知识就越多。正如著名数学家陈省身教授指出的："将来数学研究的对象，必然是流形。"为了适应面向 21 世纪课程体系和教学内容的改革，有必要开设"拓扑与流形"课。

云南师范大学数学学院从 1993 年就着手实验将拓扑与流形结合起来作为一个学期的课程开设，考虑到在教学过程中既要照顾到一般院校和师范院校学生的基础，又要保持知识的连贯性和内容的近代化，我们编写了《拓扑与流形》一书。编写过程中，我们力求体现现代数学思想和被广泛应用的数学方法，又注意为读者易于接受，使概念和理论不致使初学者感到艰涩难明。在概念引入时，尽量将抽象难懂的概念表述得具体直观，尽可能与欧氏空间

熟知的概念联系起来;同时,多用例题给予新概念进行诠释和阐明。理论证明中,尽量体现处理大范围问题的思想和方法,强调本课程与其他数学学科不同的地方。

教材在内容上先介绍集合论的有关知识,再以拓扑空间的理论为主线,并借助欧氏空间和度量空间启发拓扑概念,重点介绍拓扑空间的可数性(以 A_1、A_2 空间为主)、分离性(以 T_1、T_2 空间为主)、连通性与道路连通性、紧致性与列紧性,把一些过渡性的内容或难度较小的内容放在习题中,以有利于学生自学能力的培养。微分流形重点介绍拓扑空间上的流形结构、微分结构、子流形、单位分解定理、切向量场、Frobenius 定理、单参数可微变换群、外代数和外微分式、Stokes 定理等。由于这部分内容特别重要,所以写得详细。代数拓扑扼要介绍基本群和同调群的基本内容,是第二章内容的延伸。

本书已在云南师范大学数学学院七届学生中使用过,并通过教学实践日臻完善。编者衷心希望本书能为大学生进入近代数学的大门提供方便。热忱希望使用本书的任课教师实事求是地对本书的改进提供建设性的意见。李继彬教授和熊民福教授审阅了本书的初稿,提出了宝贵的修改意见,编著者对他们以及其他关心本书出版的同志们表示衷心感谢。限于编者水平,如有疏漏错误之处,敬希读者见教,以便更正提高。

编著者

目　　录

第一章　集论初步

本章介绍朴素集合论的某些主要结果和思想方法，掌握这些知识和方法是学习一般拓扑学必不可少的，对近代数学其他分支的学习也大有裨益。

§1　集合的概念

19 世纪对现代数学影响最深的创造之一是集合论。康托集合论早期曾受到一些数学家的怀疑甚至反对。由于皮亚诺和戴德金等人的工作，使集合论很快便渗透到数学各分支中去而成为整个数学的基础。例如，建立在集合论上的概率论公理体系促进了概率论在理论及应用两方面的发展。另一方面由于集合朴素概念的不确切，人们在康托集合论中发现了悖论，这促使人们设法为朴素集合论本身提供一个适合的公理基础，这极大地推动了 20 世纪数学基础乃至整个数学的进步。康托的集合论被人们称为数学思想最惊人的产物。

"集合"一词作为数学中一个最基本的概念，难以再用其他数学概念来定义，姑且就当作"总体"去理解。每当我们把一些事物作为一个总体来考虑时，这个总体就称作一个集合。数学中经常涉及各种各样的集合，例如：具有某种性质的数的集合；具有某种性质的图形的集合；满足一定条件的函数的集合；某些集合的集合。组成集合的事物则叫做集合的元素，或叫做点。当然，这只是解释了什么是集合，而不是建立在严格的定义和公理基础上的。

给定一个集合，就是给定它所含的元素，特殊情况下，可采用

罗列出它的全部元素的办法，例如 10 以内素数的集合可以用$\{2,3,5,7\}$表示；代数方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合就是$\{1,2\}$。但这种方法并非总是行得通的，例如对大于$\sqrt{2}$的实数的集合，我们不可能罗列出它的全部元素。因此，一般情况下，用$\{x \mid x$具有性质$P\}$来表示具有性质 P 的事物组成的集合。例如$\{f \mid f$是以$[0,1]$为定义域的实值函数$\}$表示定义在区间$[0,1]$上的实值函数组成的集合。特别把不含任何元素的集合记作 $\varnothing$，叫空集。

对于给定的集合 A 和给定的事物 x，x 是否是 A 中的元素应该是确定的。当 x 是 A 中的元素时，表示为 $x \in A$，否则表示为 $x \notin A$，二式中有且仅有一式成立。自然地，当集 A 与 B 所含元素相同时，我们认为 A 与 B 是同一个集合，记作 $A=B$。

以上介绍是集合的直观而朴素的概念，应该指明，用“具有相同性质的对象的全体”来定义集合会导致矛盾，下面是著名的罗素悖论。

令 A 是所有不包含自身的集合，即 $A=\{x \mid x \notin x\}$，则

(1)若 $A \notin A$，则 $A \in A$，矛盾。

(2)若 $A \in A$，则 $A \notin A$，矛盾。

为了避免这种逻辑上的弊病，我们附加上一条规定：集合不得以自身为元素，有了这条规定，一切集合的总体就不再是集合了，从而$\{x \mid x \notin x\}$也不再是集合了。

集合论使我们看到数学问题的共同性。例如，自然数集 N 对算术来说是包罗一切的，在算术中研究 N 的元素以及某些子集的性质。从 N 扩展整数集 Z、有理数集 Q、实数集 R、复数集 C 和区间。有理数集 Q 和无理数集 I 的结构远比区间复杂，它们处处稠密。

§2 子集、集的运算

我们知道，方程 $f(x)=g(x)$ 的解集是 $f^2(x)=g^2(x)$ 的解集的子集，一般地有

定义 1 如果集 A 的元素都是集 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记做 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

容易看出 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$ 等价于 $A=B$，此外空集 $\varnothing$ 是每个集合的子集；每一个集合以自身为子集。

定义 2 设 A、B 是两个集合，A 中一切元素与 B 中一切元素组成的集合称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

A 与 B 公有的元素组成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

显然，并与交两种运算满足交换律、结合律及分配律，即

$$\left.\begin{array}{l}A\cup B=B\cup A\\A\cap B=B\cap A\end{array}\right\}(\text{交换律})$$

$$\left.\begin{array}{l}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\end{array}\right\}(\text{结合律})$$

$$\left.\begin{array}{l}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{array}\right\}(\text{分配律})$$

一般情形下，设有一族集合 $\{A_a\mid a\in I\}$，其中指标集 I 可以是有限集也可以是无限集，该集族的并记为 $\bigcup\limits_{a\in I}A_a$，即

$$\bigcup_{a\in I}A_a=\{x\mid\text{存在某一 }a\in I,\text{使 }x\in A_a\}$$

该集族的交记为 $\bigcap\limits_{a\in I}A_a$，即

$$\bigcap_{a\in I}A_a=\{x\mid\text{对任意 }a\in I,x\in A_a\}$$

(有时我们省去指标集 I,只记做$\bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}$ 或$\bigcap\limits_{\alpha} A_{\alpha}$)

例:$A_n = \{x \mid x$是实数,并且$|x| < \frac{1}{n}\}$,用 N 表示自然数集,于是$\bigcap\limits_{n\in N} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$

$$\bigcup_{n\in N} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1,1)。$$

$B_n = \{x \mid x$是实数,并且$0 < x < \frac{1}{n}\}$,于是$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$。一般地,集族$\{B_n\}$的任何有限子组:$B_{i_1} \cap \cdots B_{i_m} \neq \varnothing$,此时称集族$\{B_n\}$具有有限交性质。

自然数集可写作$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\} = N$。

定义 3 设 A、B 是两个集合,属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的差,记为 $A - B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

特别,当 $B \subset A$ 时,$A - B$ 叫做 B(在 A 中)的余集,记为 $\sim B$,当 A、$B \subset X$ 时,$\sim A = \sim B \Leftrightarrow A = B$。

从定义 1、2、3 容易看出:若 A、$B \subset X$,则有

1° $A - B = A \cap (X - B)$

2° $A \subset B \Leftrightarrow X - A \supset X - B$

3° $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset X - B(B \subset X - A)$

4° *de Morgan* 律

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$

一般地,设$\{A_{\alpha}\}$为 X 的子集族,则有

$$X - \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (X - A_{\alpha})$$

$$X - \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X - A_{\alpha})$$

de Morgan 律可以简述为交的余等于余的并;并的余等于余的交,仅以第二式为例,证明如下:

因为 $x \in X - \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \Leftrightarrow x \in X$ 同时 $x \notin \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$，即 $x \in X$ 同时对每个 α，$x \notin A_{\alpha}$，亦即 $x \in X - A_{\alpha}$ 对每个 α 成立，换句话说，$x \in \bigcap_{\alpha}(X - A_{\alpha})$。

由上面的基本性质 $1^0,2^0,3^0,4^0$，不难得出：对任意集合 A、B、C 有

5^0　$A \cup B = A \cup (B - A) = (A - B) \cup B$

6^0　$(A - B) - C = A - (B \cup C)$

7^0　$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

8^0　$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

9^0　$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

10^0　$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

11^0　$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

仅以 $6^0,9^0$ 为例，证明如下：不妨将 A、B、C 视为某个集合 X 的子集（例如可令 $X = A \cup B \cup C$），这样就可利用 $1^0,2^0,3^0,4^0$，由 $1^0,4^0$ 得

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A - B) \cap (X - C)\\ &= A \cap (X - B) \cap (X - C)\\ &= A \cap (X - (B \cup C))\\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

这就证明了 6^0。由 1^0，有

$$\begin{aligned}(A - C) \cap (B - C) &= A \cap (X - C) \cap B \cap (X - C)\\ &= A \cap B \cap (X - C)\\ &= (A \cap B) - C\end{aligned}$$

这就证明了 9^0。

由集 A 的所有子集为元素的集合称为 A 的幂集，记为 $\mathscr{A}$。如 $A = \{a, b\}$，则 $\mathscr{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$。

§3 势、可数势

设 A、B 是两个有限集，很明显，A 与 B 的元素的个数相等的含义就是 A 与 B 可以建立一一对应，我们将“个数相等”的概念推广到无限集，就是下面对等的概念。

定义 如果集合 A 与 B 之间存在一一对应，则称 A 与 B 对等。凡是对等的集合，就称它们具有相同的势或说 A 与 B 的基数相同。集 A 的势记作 $|A|$，于是 A 与 B 对等就表示为 $|A| = |B|$。

规定空集的势为 0，即 $|\emptyset| = 0$。注意 $|\{\emptyset\}| = 1$。

n(自然数)个元素组成的集合的势就用 n 表示。

记自然数集 N 的势为 $\aleph_0$。凡是势为 $\aleph_0$ 的集合都叫做可数无限集。

例如：

$$N = \{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$$

$$N_1 = \{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$$

$$N_2 = \{1,4,9,\cdots,n^2,\cdots\}$$

等，都是可数无限集，它们的势都是 $\aleph_0$（注意一个无限集可以与其一真子集对等）。实数集合 $(-\infty,+\infty)$ 与它的一个真子集 $(-1,1)$ 是对等的，其一一对应如下图所示：

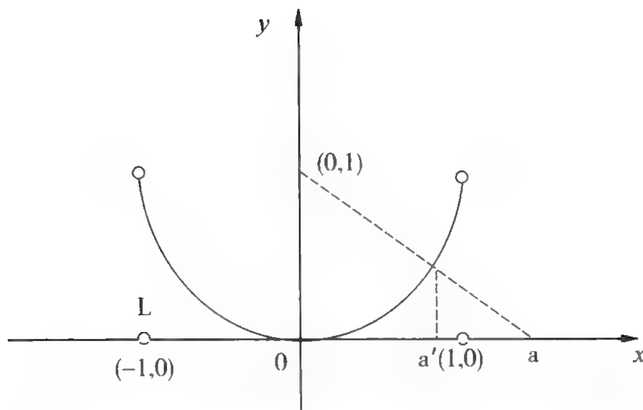
图中的曲线 L 表示圆心在点(0,1)，半径为 1 的圆周的下半部分。$(-\infty,+\infty)$ 中的点 a 对应于 $(-1,1)$ 中的点 a'。

以后将有限集与可数无限集统称为可数集。由于任何一个可数无限集 A 与自然数集 N 对等，所以可以将 A 表示成

$$A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

定理 1 可数集的子集是可数集

证明 当可数集是有限集时结论显然，以下设 A 是可数无限



集，$B\subset A$，设 B 的第一个元素为 a_{n_1}，第二个元素为 a_{n_2} 等等，若存在某个 k，使 $a_{n_k}\in B$，$n>n_k$ 时，$a_n \notin B$，则 B 为有限集，从而是可数集，若这样的 k 不存在，则 $B=\{a_{n_1},\cdots,a_{n_k},\cdots\}$ 为可数无限集。

定理 2　可数个可数集的并是可数集

证明　先设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 是可数无限多个互不相交的可数集，证明 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可数集，设

$$A_1=\{a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\cdots\}$$

$$A_2=\{a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots\}$$

$$\cdots$$

$$A_m=\{a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn},\cdots\}$$

$$\cdots$$

把 a_{mn} 的两个下标的和 $m+n$ 称为 a_{mn} 的高，将 $A=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$ 的元素加以排列：高不相同时，高小者排在前；高相同时，第一个标号小者排在前(这种排法称为对角线法)即

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},\cdots$$

于是 A 的全部元素排成了无限序列，所以 A 是可数无限集。

当 $A_1, A_2, A_m, \cdots$ 间有相同元素时，可先去掉重复出现的元素，按照新的集合

$$A_1, A_2 - A_1, A_3 - (A_1 \cup A_2), \cdots, A_n - (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i), \cdots$$

进行排列，此时新的集序列与原有的集序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$$

有相同的并。

定理 3　每个无限集 M 必包含一个可数无限子集 A（可以要求 A 是真子集，甚至可要求余集 $M - A$ 仍是无限集）

证明　因为 M 是无限集，M 中至少有一个元素 a_1，并且 $M - \{a_1\}$ 为无限集，于是又有 $a_2 \in M - \{a_1\}$ 使 $M - \{a_1, a_2\}$ 是无限集，设已取得互不相等的元素 $a_1, \cdots, a_n$，由于 $M - \{a_1, \cdots, a_2\}$ 仍为无限集，所以存在 $a_{n+1} \in M - \{a_1, \cdots, a_n\}$，这样的步骤可以一直进行下去，说明存在无限序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

其中 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \subset M$ 且其中元素互不相同。若令 $A = \{a_{2n} \mid n \in N\}$，则 A 及 $M - A$ 均为 M 的真子集。

定理 4　设 M 是非可数集（非可数的无限集），A 是 M 的可数子集，则 $M - A$ 与 M 对等。

证明　由定理 2 知 $M - A$ 是非可数集，由定理 3 又知存在可数无限集 $B \subset M - A$，从而

$$M = A \cup B \cup [M - (A \cup B)]$$
$$M - A = B \cup [M - (A \cup B)]$$

因为 $A \cup B$ 与 B 都是可数无限集，存在一一对应 $f: A \cup B \to B$。令

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{当 } x \in A \cup B \text{ 时,} \\ x & \text{当 } x \in M - (A \cup B) \text{ 时,} \end{cases}$$

则 F 是 M 与 $M - A$ 间的一一对应。

对等

定理 3 和定理 4 说明：任何一个无限集必与其自身的某个真子集对等，这是无限集与有限集的本质区别。

例 1

1^0 所有自然数对的集合 $\{(m,n)\mid m,n\in N\}$ 是可数集。

2^0 有理数集是可数集。

3^0 n 维欧氏空间中一切有理点组成的集是可数集。

4^0 有理系数多项式之集是可数集。

历史上，康托由有理数集可数和猜想到实数集不可数萌发了集合论的创新思想。他成功地证明了实数集不可数，这标志着集合论的诞生。

例 2 证明 $(0,1]$ 是不可数集。

证明 若 $(0,1]$ 为可数集，则其中的所有实数可排成一排：t_1，t_2，$\cdots t_n$，$\cdots$。令 $t_1=0.t_{11}t_{12}t_{13}\cdots$，$t_2=0.t_{21}t_{22}t_{23}\cdots$，$t_3=0.t_{31}t_{32}t_{33}\cdots$，等等。作小数 a，且 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$。其中 $a_i\neq t_{ii}$，$a_i\neq 0(i=1,2,\cdots)$。于是，$a\in(0,1]$ 但不含在 $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$ 中，矛盾。

与实数集等势的集称为连续集，其势记为 c。例如，无理数集 I 的势为 c。事实上，由定理 4 易知，加一个可数集到无限集中，此无限集的势不变。于是 $|I|=|I\cup Q|=|R|=c$。可见，无理数比有理数多得多，无理数是实数的主体。整系数多项式的实数根称为代数数。代数数全体是可数集。不是代数数的实数为超越数，其势为 c。闭区间 $[a,b]$ 上连续函数全体的势为 c，而 $[a,b]$ 上实函数全体的势大于 c。人们自然要问在可列集的势和连续集的势之间是否存在着中间势 a：$\aleph_0<a<c$?，答案是否定的。这就是著名的 Cantor 连续统假设。这个假设现在终于被人们搞清楚了。这个假设可以作为一条公理，并且与集合论中其他一些公理是独立的。

§4 势的比较

由§3知道,势的概念是有限集元素数量概念的扩充,数量的基本性质之一是可比较两个量的大小,两个数量,要么相等,要么一个大于另一个,因此,很自然想到势的比较问题。

设 A 与 B 是给定的两个集合,只有下列四种情形出现;

1^0 A 与 B 的某个子集对等,但 B 不与 A 的任何子集对等;

2^0 B 与 A 的某个子集对等,但 A 不与 B 的任何子集对等;

3^0 A 与 B 的某个子集对等,同时 B 与 A 的某个子集对等;

4^0 A 与 B 的任何子集不对等,同时 B 与 A 的任何子集不对等。

对情形 1^0,我们称 A 的势小于 B 的势,记为 $|A| < |B|$,自然对情形 2^0,应是 $|A| > |B|$,对情形 3^0 我们证明 $|A| = |B|$,对情形 4^0 是不会出现的(证明这个事实要用到选择公理,我们略去证明)。从而知道势是可以比较的,换言之,两个集合要么势相等,要么一个的势比另一个大。

定理 1(Bernstein)设 A 与 B 的某个子集对等,B 与 A 的某个子集对等,则 A 与 B 对等(即 $|A| \leqslant |B|, |B| \leqslant |A| \Rightarrow |A| = |B|$)

证明 由假设,存在 $B_1 \subset B, A_1 \subset A$,使 A 与 B_1 对等,B 与 A_1 对等,从而 B_1 与 A_1 的某个子集 A_2 对等,于是有 $A \supset A_1 \supset A_2$ 且 A 与 A_2 对等(对等有传递性),我们只要证明 A 与 A_1 对等。设 $f: A \to A_2$ 是一个一一对应,由 $A_1 \subset A$ 知,$f(A_1) = A_3 \subset A_2$。由 $A_2 \subset A_1$ 知 $f(A_2) = A_4 \subset A_3$,按这样的步骤继续下去可得到一串集合

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots \supset A_n \cdots$$

其中 A 与 A_2 对等,A_1 与 A_3 对等,A_2 与 A_4 对等,…,由传递性也有 $A - A_1$ 与 $A_2 - A_3$ 对等,$A_1 - A_2$ 与 $A_3 - A_4$ 对等,…,令

$$D = A \cap A_1 \cap A_2 \cdots,$$

则

$$A = D \cup (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots$$

$$A_1 = D \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup (A_4 - A_5) \cup \cdots$$

再令 $A = A_0$，及

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A_{2n} - A_{2n+1} \quad (n = 0,1,2,\cdots) \\ x & \text{其它 } x \end{cases}$$

则 $g: A \to A_1$ 是一一对应。

例 证明正方形 $S: 0 < x < 1, 0 < y < 1$ 上的点所成的集合与开区间(0,1)等势(Cantor 定理)。

证明 $\forall (x, y) \in S$，则 $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$，$y = 0.b_1b_2b_3\cdots$。令 $z = 0.a_1\,b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$，显然，当$(x, y)$不重合于$(x', y')$时，对应的 $z \neq z'$。由所有这样的 z 构成的集合 Z，应有 $c \geqslant |Z| = |S|$。另一方面，对 S 的子集 $S^* = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, y = \frac{1}{2}\}$，有 $c = |S^*| \leqslant |S|$。由 Bernstein 定理，$|S| = c$。

上面我们对势的比较问题作了一些讨论，要使这番讨论确有意义，应该证明不同的无限势是存在的，下面将证明不同的无限势存在，而且对任何一个集合 X，都有势 $> |X|$ 的集合，即存在任意大的势。

定理 2 设 X 是任意一个集合，μ 为 X 的子集组成的集合 $\{A \mid A \subset X\}$ 则 $|\mu| > |X|$

证明 由于独点集 $\{x\}$，$x \in X$，都是 μ 的元素，所以 $|\mu| \geqslant |X|$，下面用反证法证明 $|\mu| \neq |X|$

假设 $|\mu| = |X|$，$f: X \to \mu$ 是一一对应。令

$$M = \{x \in X \mid x \bar{\in} f(x)\}$$

显然 $M \in \mu$，设 $x^* \in X$，使得 $f(x^*) = M$，若 $x^* \bar{\in} f(x^*)$，则 $x^* \in M$，矛盾，若 $x^* \in f(x^*)$，则 $x^* \bar{\in} M$，也矛盾，从而 $|\mu| = |X|$ 不可能。

§5 关　系

数学的许多对象都可以用集合和关系的语言予以简洁的描述，并已成为刻画一些必要概念(序、映射、函数…)的基础。我们多次使用过“关系”一词，如实数之间的大小关系，集合之间的包含关系，图形的全等关系等等，现在将从集合的观点出发来描述这一概念，并着重讨论几类常用的关系。

设 X,Y 为集合，由 X，Y 决定的集合

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

称为 X 与 Y 的直积。$X \times X$ 的一个子集 R 称为 X 中的一个关系，如果 $(a,b) \in R$，就说 a 与 b 有关系，记做 aRb。

例　$X = (-\infty, +\infty)$ 表示实数集，则 $X \times X$ 的子集 $\{(x,y) \mid x,y \in X, y \leq x\}$ 表示了关系“$\leq$”，$\{((x,y) \mid x,y \in X, y > x\}$ 代表了关系“$>$”，$\{(x,x) \mid x \in X\}$ 代表了关系“$=$”。此外，$E_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$，$E_2 = \{(x,y) \mid y = sin\ x\}$ 也各自代表了 X 中的彼此不相同的关系。

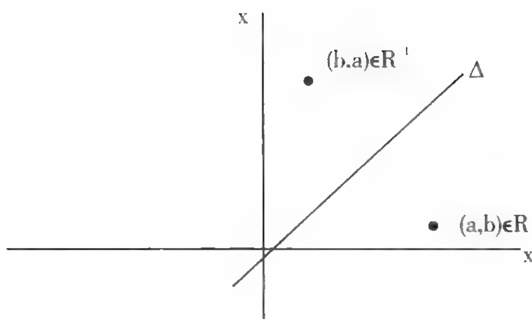
5.1　逆关系

设 R 是集 X 中的一个关系，称集合

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

为 R 的逆。

显然 R^{-1} 是 X 中的一个关系，我们把 $\{a \mid (a,b) \in R\}$，$\{b \mid (a,b) \in R\}$ 分别叫做 R 的定义域和值域。于是 R 的定义域就是 R^{-1} 的值域，R 的值域就是 $R^{-}1$ 的定义域。从直观图上来看，因为 (a,b) 和 (b,a) 关于对角线 $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 对称，所以 R 与 R^{-1} 是 $X \times X$ 中关于对角线 Δ 对称的两个子集，也容易看出 $(R^{-1})^{-1} = R$；当 A、B 都是 X 的子集时，$(A \times B)^{-1} = B \times A$



5.2 复合关系

设 R、S 都是 X 中的关系，称

$$S \circ R = \{(a,c) \mid \text{存在 } b \in X, \text{使}(a,b) \in R, (b,c) \in S\}$$

为 R 和 S 的复合

$(a,c) \in S \circ R$，可理解为 X 中的点 a 通过 R 的作用变为 X 中的某点 b，而 b 又通过 S 变到 c。

一般说来，$S \circ R \neq R \circ S$，例如 $R = \{(1,2)\}$，$S = \{(0,1)\}$，则 $S \circ R = \emptyset$，而 $R \circ S = \{(0,2)\}$

关系的复合运算恒满足结合律，即

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

这是因为，如果 $(a,b) \in T \circ (S \circ R)$，则存在 $d \in X$，使 $(a,d) \in S \circ R$，$(d,b) \in T$，进而存在 $c \in X$，使 $(a,c) \in R$，$(c,d) \in S$，又有 $(d,b) \in T$，所以 $(a,b) \in (T \circ S) \circ R$，反过来推导也成立，从而 $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$。

设 R 是集合 X 的一个关系，$a \in X$，$A \subset X$，令

$$R(a) = \{b \mid (a,b) \in R\}$$

$$R(A) = \{b \mid \text{存在 } a \in A, \text{使}(a,b) \in R\}$$

显然 $R(A) = \bigcup_{a \in A} R(a)$

可以证明下列法则

$$(S \circ R)(A) = S(R(A))$$

$$R(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} R(A_i)$$

$$R(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} R(A_i)$$

(留作习题)。

几种常见的关系是：1^0 恒等关系 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$，$2^0$ 自反关系 R，如果 $\Delta \subset R$，3^0 对称关系 R，如果 $R = R^{-1}$。4^0 传递关系 R，如果 $R \circ R \subset R$。5^0 等价关系 R，如果 R 是自反的，对称的和传递的，以上这些关系中，等价关系是一类重要而且非常有用的关系。

由定义知，如果 X 中的关系 R 具有自反性、对称性和传递性，则 R 就是一等价关系，当 R 是 X 上的等价关系时，我们把形如 $R(x)$ 的子集叫做等价类。在科学研究中，常将整个集合(研究对象)逐级分解成等价类，如二次曲线(面)的分类。这是一个常用的研究方法。

定理 1 如果 R 为集合 X 上的一个等价关系，则

1^0 $x \in R(x)$，$X = \bigcup_{x \in X} R(x)$

2^0 对任意两个等价类 $R(x)$，$R(y)$，或者 $R(x) = R(y)$，否则 $R(x) \cap R(y) = \varnothing$

证明 1^0 显然。

2^0 若 $z \in R(x) \cap R(y)$，则 $(x, z) \in R$，$(y, z) \in R$，由 R 的对称性和传递性又推出，$(x, y) \in R$，即 $R(x) = R(y)$。

定理 1 说明，如果将等价类作元素组成一个集合 $\mathscr{A}$，则 $\mathscr{A}$ 是以 X 的彼此不相交的非空子集为元素的集族并且使 $X = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$，我们将这样的集族 $\mathscr{A}$ 称为 X 的一个分解，给定了 X 上的一个等价关系，就给定了 X 的一个分解，反之，若 $\mathscr{A}$ 为 X 的一个分解，令

$$R = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} (A \times A)$$

容易证明 R 是 X 的一个等价关系，并且 A 的一个元素是正好是一

个等价类。

有时，我们也把 X 的关于等价关系 R 的等价类为元素的集合称为 X 关于 R 的商集，记为 X/R，即

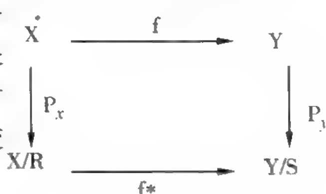
$$\{R(x)\mid x\in X\}=X/R$$

对应 $P_X\to X/R$ 由 $P_X:x\to R(x)$ 给出，称为 X 到商集 X/R 的自然投影。

例 $X=\{\frac{m}{n}\mid m\in Z,n\in N\}$，X 中的等价关系 R 为：$m_1n_2=m_2n_1$，则 $(\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2})\in R$。$R$ 将整个 X 划分为等价类即有理数：$X/R=Q$。每一类包含且只包含一个既约分数，它是该类的代表。

设 X、Y 各有等价关系 R,S，对应 $f:X\to Y$ 适合：任何 $x,x'\in X$，$R(x)=R(x')$ 必有 $S(f(x))=S(f(x'))$，就说 f 是关系保存的。一个关系保存的对应可导出商集之间的一个对应 f_*。

定理 2 设 X,Y 为两个集合，各有等价关系 R,S，$f:X\to Y$ 如果是关系保存的对应，则存在唯一的一个对应 $f_*:X/R\to Y/R$，使右图表可以交换（$P_Y\cdot f=f_*\cdot P_X$）。



反之，若有两个对应 f、f_* 使上图可交换，则 f 一定是关系保存的，因而 f_* 一定由 f 诱导的那个映射。

证明 （$\Rightarrow$）先证 f_* 的存在性，定义 $f_*(R(x))=S(f(x))$，由于 f 是关系保存的，所以，如果 $R(x_1)=R(x_2)$，则 $S(f(x_1))=S(f(x_2))$，从而 $f_*(R(x_1))=f_*(R(x_2))$ 定义合理。

再证 f_* 使图表交换。$P_Y\cdot f(x)=S(f(x))$，$f_*\cdot P_X(x)=f_*(R(x))=S(f(x))$ 所以 $P_Y\cdot f=f_*\cdot P_X$。

证明 f_* 是唯一的，如果 $g_*:X/R\to Y/S$ 也使图表可交换，那

么 $P_Y \cdot f = g_* \cdot P_X$，从而对任何 $x \in X$，$S(f(x)) = g_*(R(x))$，从而 $g_*(R(x)) = f_*(R(x))$ 即 $g_* = f_*$。

($\Leftarrow$)因为 f、f_* 使图表可交换，所以，对任意 x_1, x_2，$R(x_1) = R(x_2)$，有

$$P_Y \circ f(x_1) = f_* \circ P_X(x_1) = f_*(R(x_1))$$

$$P_Y \circ f(x_2) = f_* \circ P_X(x_2) = f_*(R(x_2))$$

$$P_Y \circ f(x_1) = P_Y \circ f(x_2)$$

从而

$$S(f(x_1)) = S(f(x_2))$$

即 f 是关系保存的，由 f_* 的唯一性立得 f_* 是由 f 诱导的通过商集的对应。

函数关系是我们熟知的一种关系，设 X 为集合，以往我们称映射 $f: X \to R^1$ 为一个函数，如果将序偶 $(x, f(x))$ 组成的集合视为 $X \times R^1$ 的一个子集，则可将函数 f 视为 X 与 R^1 间的一个关系，我们可这样定义函数：设 f 为 $X \times R^1$ 的一个子集，如果 $(a, b) \in f$ 与 $(a, b') \in f$ 同时成立时就有 $b = b'$，则称 f 是一个 X 上的函数，这样定义函数使得函数与函数的图形完全一致，都是 $X \times R^1$ 的一个子集 f。

习　题

1. 对任意集合 A、B、C，证明下列各式成立

$$A \cup B = (A - B) \cup B = A \cup (B - A)$$

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

2.已知对任意集合 M 都有 $A \cup M \subset B \cup M$ 成立,证明 $A \subset B$

3.已知对任意集合 M 都有 $A \cap M \subset B \cap M$ 成立,证明 $A \subset B$

4.已知存在某集合 C 使得 $A \cup C = B \cup C$ 和 $A \cap C = B \cap C$ 同时成立,推证 $A = B$

5.设 $A = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 1\}$,给出一个由 A 到 B 上的一一映射。

6.已知 $A \cup B = (0,1)$,证明 A 和 B 至少有一个与区间 $(0,1)$ 等势

7.(1^0) $X = \{1,2,3\}$ 中的一个关系 $R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$。讨论 R 是否满足反身、对称、传递三性质。

(2^0)集 $A = \{1,2,3\}$, A 中的关系 R 为 $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$,求 A 中元素 aRb 的充要条件。

8.(1^0) U、V 为 R^1 中的关系, $U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $V = \{(y,z) \mid 2y + 3z = 4\}$。写出复合关系 $V \circ U$。

(2^0) R^1 中的关系 S 为 x、$y \in R^1$,则 $x \in [n, n+1]$ 且 $y \in [n, n+1]$ $(n \in N)$,试在平面 R^2 上画出关系 S 的图示。

9.在下表中,以"√"表示成立,"×"表示不成立。

关系	自反性	对称性	传递性
$A \subset B$			
$A \cap B \neq \varnothing$			
a、b 互质			
$a > b$			
$a \geqslant b$			
直线 $l \perp m$			
圆相切			
圆正交			

10.可列个可列集的直积的基数是 c。

提示：设 $M = N_1 \times N_2 \times \cdots$，$M$ 的元素为 $\{n_1, n_2, \cdots\}$，令它对应于

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}}$$

，则 $x \in (0,1)$ 为无理数。

例如

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

。

第二章　拓扑空间

§1　度量空间的拓扑

极限运算是分析的基本运算。在分析学中，极限的形式虽然是多样的，而本质却是一致的。分析中一系列基本事实都是基于实数间的距离。Cantor(1845～1918，德国数学家)于19世纪70年代在欧氏空间中研究了由距离产生的聚点、内点、外点、边界点、开集、闭集等概念。这些概念的考虑，显然不必限于欧氏空间。伴随着古典分析的发展，Hadamard、Borel等相继研究了各种函数类中的各种收敛性，它们也都是基于函数间的距离。于是Frechet(1879～1973，法国数学家)从大量事物中，抽象出距离特征的实质，在1906年推进了Cantor的考虑而导入了度量空间。在此基础上，Hausdorff(1868～1942，德国数学家)再将邻域具有的性质整理为4条公理，于1914年明确地定义了拓扑空间。可见，n维欧氏空间是度量空间的一个模型，而度量空间也只是拓扑空间的一个特例。为了便于理解拓扑空间，先讨论比较具体的度量空间为宜；这也是由于在集合上定义拓扑，最常用的方法之一就是借助于该集合上的度量来实现的缘故。用这种方法给出拓扑是现代分析的核心，它已成为学习现代数学必备的基础知识。

定义1　设是一个集合，如果映射

$$\rho: X \times X \to R, (x, y) \to \rho(x, y)$$

满足：

$(1^0)\rho(x,y) \geqslant 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$(2^0)\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$　　(对称性)

$(3^0)\ \rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + p(y,z)$(三角不等式)

则称(X,ρ)为度量(距离)空间,ρ 称为 X 上的度量(距离),函数 $\rho(x,y)$称为点 x 和 y 之间的距离。

例 1　x,y 为实数,易知 $\rho(x,y) = |x-y|$ 为直线 R^1 上的一个度量;而对于平面上的两点 $p(x_1,y_1)$和 $q(x_2,y_2)$,定义

$\rho(p,q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$为平面 R^2 上的一个度量。

例 2　X 为非空集合,令 $\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & 若\ x = y \\ 1 & 若\ x \neq y \end{cases}$,$(X,\rho)$,是一个度量空间,称为离散度量空间。

例 3　$C[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上的全体连续函数,则由

$$\rho_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

给出 $C[a,b]$上的一个度量,其几何意义为两曲线之间的面积。而由

$$\rho_2(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

给出 $C[a,b]$上的另一个度量,其几何意义则为两曲线间的最大垂直间隔。

例 4　R^n 中的任意两点 $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1 \cdots, \mathrm{x}_n)$和 $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_n)$,定义

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

则 R^n 为度量空间。度量定义中的(1^0)和(2^0)是显然的,仅验证(3^0),

即$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$

令 $u_i = z_i - y_i, v_i = y_i - x_i$，则上式化为：

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

两边平方：

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \quad 。$$

这又只需证明 $\sum_{i=1}^{n}(u_i v_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} u_i^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)^{\frac{1}{2}}$，这恰是 Schwarz 不等式。

例 5 $R^\infty = \{x = (x_1, x_2 \cdots) \mid x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$，即 R^∞ 为所有平方收敛的实数序列构成的集合。定义：

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}。$$

以下先说明 $\rho(x, y) < \infty$，并验证 R^∞ 为度量空间（Hilbert 空间）。

由 R^n 中三角不等式，对每一正整数为 n，均有 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$，对 n 取极限，可得 $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} < \infty$，因此度量 ρ 是有意义的，并且还指出点 $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \cdots\cdots) \in R^\infty$。若点 $(z_1, z_2, \cdots\cdots) \in R^\infty$，则 $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \cdots\cdots)$、$(z_1 - y_1, z_2 - y_2, \cdots\cdots) \in R^\infty$，对此两点应用前一不等式，即有：

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - z_i)^2}$$

即度量定义中(3^0)成立。关于定义(1^0)和(2^0)是显然成立的。

下面从另一角度构造度量空间。

例 6 设(X,ρ)为度量空间，$A\subset X$，令 $\rho_A=\rho|_{A\times A}$，即

$$\rho_A: A\times A\to R$$
$$(x,y)\to\rho_A(x,y)=\rho(x,y)$$

显然(A,ρ_A)也是度量空间，称为(X,ρ)的子度量空间，有时仍将 ρ_A 记为ρ。

例 7 设。(X_1,ρ_1)和(X_2,ρ_2)都是度量空间，令

$$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$$
$$\rho:(X_1\times X_2)\times(X_1\times X_2)\to R$$
$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\to((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$
$$=[\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)]^{\frac{1}{2}}$$

容易验证$(X_1\times X_2,\rho)$也是一个度量空间，称为(X_1,ρ_1)与(X_2,ρ_2)的积度量空间，记为$(X_1\times X_2,\rho_1\times\rho_2)$。下面验证定义中的$(3^0)$，事实上

$$(\rho(x_1,x_2),(y_1,y_2))+\rho((y_1,y_2),(z_1,z_2)))^2$$
$$=\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)+\rho_1^2(y_1,z_1)+\rho_2^2(y_2,z_2)+2\rho((x_1,x_2)(y_1,y_2))\rho((y_1,y_2),(z_1,z_2))$$
$$=\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_1^2(y_1,z_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)+\rho_2^2(y_2,z_2)+2(\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2))^{\frac{1}{2}}(\rho_1^2(y_1,z_1)+\rho_2^2(y_2,z_2))^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_1^2(y_{\cdot}z_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)+\rho_2^2(y_2,z_2)+2(\rho_1(x_1,y_1)\rho_1(y_1,z_1)+\rho_2(x_2,y_2)\rho_2(y_2,z_2))$$
$$=(\rho_1(x_1,y_1)+\rho_1(y_1,z_1))^2+(\rho_2(x_2,y_2)+\rho_2(y_2,z_2))^2\geqslant\rho_1^2(x_1,z_1)+\rho_2^2(x_2,z_2)$$
$$=\rho^2((x_1,x_2),(z_1,z_2))$$

其中第一个不等号是由于 Schwarz 不等式的缘故。

类似地，可定义$(X_1\times\cdots\cdots\times X_n,\rho_1\times\cdots\cdots\times\rho_n)$。

在分析学中最常用的度量空间是函数空间或序列空间，以研究函数列的某种特定的收敛概念。下面给出距离描述的极限定义。距离是几何语言，因此，几何中的术语成为研究分析学的工具，以致产生了现代分析。

定义 2 设(X,ρ)为度量空间，$x_n(n=1,2,\cdots\cdots)$、$x\in X$，如果当$n\to\infty$时，数列$\rho(x_n,x)\to 0$，就称点列$\{x_n\}$按照距离ρ收敛于x，记作：

$$\lim_{n\to\infty}x_n = x(\text{或 } x_n\to x(n\to\infty))$$

这时称$\{x_n\}$为收敛点列，x为$\{x_n\}$的极限点。

例 8 给出C[a,b]和度量ρ_2，其中点列收敛的意义为：

$x_n\to x$等价于函数列$\{x_n(t)\}$一致收敛于$x(t)$（证明留作习题）。

若A,B为X的两个非空子集$\rho(A,B)=\inf\limits_{a\in A,b\in B}\rho(a,b)$称为A和B的距离。特别地，$\rho(x,A)$表示点x到集合A的距离。

若$A\cap B\neq\varnothing$，则$\rho(A,B)=0$。其逆未必成立，如在直线R上，$B=\{x\mid x=n-\frac{1}{n},n\geqslant 2\}$，$N$为自然数集，$N\cap B=\varnothing$，但$\rho(n,n-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，$\rho(N,B)=0$；开区间(0,1)与(1,2)也是如此。下面引入度量空间的拓扑结构。

集合$B(a,r)=\{x\mid x\in X,\rho(a,x)<r,r>0\}$称为以$a$中心$r$为半径的开球，$\overline{B}(a,r)=\{x\mid x\in X,\rho(a,r)\leqslant r\}$称为闭球，这和$R^n$中习惯的理解是一致的。

$A\subset X$，若对于任意的$x\in A$，都有$B(x,r_x)\subset A$，称A为开集。$\varnothing$,X是开集。开集有下列性质：

(1^0)任意开球是开集：若$x\in B(a,r)$，则$\rho(x,a)<r$。令$r_x=$

$r-\rho(a,x)$，则 $B(x,r_x)\subset B(a,r)$。事实上，$\forall y\in B(x,r_x)$，$\rho(a,y)\leqslant\rho(a,x)+\rho(x,y)<r$ 即 $y\in B(a,r)$。

(2^0)任意个开集并仍是开集：设 $\{A_\alpha\}(\alpha\in I)$ 为开集族，$A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，当 $x\in A$ 时，则有 $\alpha\in I$，使 $x\in A_\alpha$。于是有 r_x，使 $B(x,r_x)\subset A_\alpha\subset A$，即 A 是开集。

(3^0)有限个开集的交仍是开集：就两个开集证明即可。设 A_1,A_2 为开集，$x\in A_1\cap A_2$，则存在 r_1,r_2，设 $B(x,r_1)\subset A_1$，$B(x,r_2)\subset A_2$。令 $r=\min(r_1,r_2)$，则 $B(x,r)\subset A_1\cap A_2$。

但无限个开集的交集未必还是开集，如 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=\{1\}$ 不是 R^1 中开集。

X 为度量空间，$x_0\in X$，X 中包含 x_0 的任何开集 $U(x_0)$ 称为 x_0 的一个(开)邻域。

定理 1 X 为度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列，$x_0\in X$。点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 的充要条件是对于 x_0 的任何邻域 $U(x_0)$，存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in U(x_0)$。

证明 必要性。设 $x_n\to x_0$，任取 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，有正数 r，使 $B(x_0,r)\subset U(x_0)$。对于 n，有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<r$，因而 $x_n\in B(x_0,r)\subset U(x_0)$。

充分性。设 $\{x_n\}$ 具有如下性质，对于 x_0 的任一邻域，例如 $B(x_0,\varepsilon)$，有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，。$x_n\in B(x_0,\varepsilon)$，那么当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$，因此，$x_n\to x_0$，证毕。

分析学中有些极限概念并不能利用距离来描述，而由定理 1，点列收敛的概念可以不用距离而用邻域(环境)来描述，这是比度量空间更一般的极限理论。而邻域是用开集来定义的，因此，如果在一个集合中用公理法规定“哪些子集是开集”，使之满足开集三条公理，就称这个集合具有“空间结构”。对于这种集合之间的映

射可利用开集定义其连续性,这就导出了今后拓扑空间和一般连续映射的概念,度量空间则是拓扑空间重要的特例和背景。

习　题

1.设(X,ρ)为度量空间,定义

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

则(X,ρ_1)是度量空间,并且是有界的,即 $\rho_1(x,y)\leqslant$常数。

2.证明,离散度量空间(例2)中的单点集是开集,从而任何集都是开集。

3.设 X 是具有代数结构的线性空间,如果 X 上的实值映射

$$\|\ \|;X\to R,x\to\|x\|$$

满足:(1^0)　　$\|x\|\geqslant 0,\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$(零向量);

　　(2^0)　　$\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|,x\in X,\lambda\in R$;

　　(3^0)　　$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,x,y\in X$;

则称$(X,\|\ \|)$为按范数$\|\ \|$为赋范线性的空间,简称赋范空间。

若在赋范空间 X 上定义函数 ρ:

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

证明(X,ρ)是度量空间。

4.X 是一个向量空间,如果实值映射 $g=<,>$:

$$X\times X\to R,(x,y)\to g(x,y)=<x,y>$$

满足:(1^0)　　$<x,x>\geqslant 0,<x,x>=0\Leftrightarrow x=0$(正定性)

　　(2^0)　　$<x,y>=<y,x>$(对称性)

　　(3^0)　　$<x_1+x_2,y>=<x_1,y>+\langle x_2,y\rangle,<\lambda x,y>=\lambda<x,y>,\lambda\in R$(线性性)

则称$(X,<,>)$为内积空间,$g=<,>$为 X 上的一个内积。

线性空间 X 上定义了内积，便有了角度的概念，并且有 Schwarz 不等式：

$$|<x,y>| \leqslant \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} <y,y>^{\frac{1}{2}}。$$

若定义范数 $\|x\| = <x,x>^{\frac{1}{2}}$，证明$(X, \| \|)$是由$(X, <,>)$导出的赋范空间。

5.设(X,ρ)为度量空间，$x_n \in X(n=1,2,\cdots\cdots)$，如果$\forall \varepsilon>0$，存在自然数 N，当 n,m > N 时，有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称点列$\{x_n\}$为 Cauchy 点列或基本列。如果 X 中的所有 Cauchy 点列都收敛，则称(X,ρ)为完备的度量空间。证明，收敛点列必为 Cauchy 点列，但反之不真。

6.给出 $C[a,b]$上的度量 $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$，证明其点列 $x_n \to x(n\to\infty)$等价于函数列$\{x_n(t)\}$一致则敛于 $x(t)$ $(t\in[a,b])$。

§2 拓扑空间

从度量空间的拓扑可知，开集(而不是直接用度量)同样可以定义映射的连续性，并且比度量更深刻地刻化了连续性的本质。许多数学分支的研究范围早已不再囿于欧氏空间或度量空间，必须研究更加一般空间——拓扑空间。

定义 1 设 X 是集合，τ 是 X 的一个子集族；且满足：

(1^0) $X,\emptyset\in\tau$；

(2^0) τ 中任意多个成员的并集仍在 τ 中；

(3^0) τ 中有限多个成员的交集仍在 τ 中；

则称(X,τ)为一个拓扑空间，τ 称 X 上的一个拓扑，τ 中的成员称为这个拓扑空间的开集。注意，开集的概念不是预先定义的，而是有了拓扑结构之后，称 τ 中的成员为开集。

定义 1 中的三个条件称为拓扑公理。(3^0)可等价的换为

$(3^0)'$　　τ 中两个成员的交集仍在 τ 中。

一般来说一个集合上可以规定许多不同的拓扑，确切地说，拓扑空间是一个有序对(X,τ)，在不致混淆的情况下，径称 X 为拓扑空间。

例 1　$X=\{a,b,c\}$，令 $\tau_1=\{\varnothing,X\}$，$\tau_2=\{\varnothing,\{b\},\{b,c\},\{a,b\},X\}$，$\tau_3=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}\{b,c\}\{a,b,c\}\}$，则$(X,\tau_i)(i=1,2,3)$均为拓扑空间。但 $\tau=\{\varnothing,\{a,b\},\{a,c\},X\}$ 不是 X 上的拓扑。若 $X=\{a,b\}$，$\tau=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$，则$(X,\tau)$为拓扑空间(Sierpinski 空间)。

例 2　X 为非空集合，定义 X 上两个最极端的拓扑。X 的所有子集族是 X 为一个拓扑，称之为离散拓扑：$\tau_{离散}=\{G\mid 任何\ G\subset X\}$，$X$ 每个子集都是开集，开集最多。仅由 $\varnothing$ 和 X 组成的族也是 X 的一个拓扑，称之平庸拓扑：$\tau_{平庸}=\{\varnothing,X\}$，开集最少。

例 3　设(X,τ)是拓扑空间，$Y\subset X$，令

$$\tau_Y=\{H\mid H=G\cap Y,G\in\tau\}$$

则(Y,τ_Y)是拓扑空间(证明留作习题)，称 Y 为由 X 诱导的子拓扑空间或相对拓扑空间。

例 4　(X,ρ)为度量空间，令 $\tau=\{G\mid G\subset X$，且对任何 $x\in G$，有 $B(x,\varepsilon)\subset G\}$，则$(X,\tau)$是一个拓扑空间。并称 τ 是由度量 ρ 诱导出来的度量拓扑。今后，我们说度量空间是一个拓扑空间，指的就是由它诱导出的(X,τ)。

X 的拓扑如果是由集合 X 上的某个度量 ρ 所诱导出的，则称 X 是可度量化空间。对于拓扑空间，可度量化往往是一个最理想的性质，对于度量空间可进行更多的分析学研究。

下面给出较复杂的拓扑空间的例子，它们对考虑拓扑空间的性质很有用处。

例 5　X 为实数集合 R，$\tau=\{G\mid 任何\ x\in G$，存在 $\alpha>x$，使$[x,$

$\alpha) \subset G \subset X\}$，则$(X,\tau)$为拓扑空间，事实上，条件$(1^0)$显出满足，条件$(2^0)$：$\forall x \in \bigcup_\alpha G_\alpha$；存在 $\beta > x$，使$[x,\beta) \subset G_{\alpha 0} \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$；条件$(3^0)$：$\forall x \in G_1 \cap G_2$，存在 $\alpha_1, \alpha_2 > x$ 使$[x,\alpha_i) \subset G_i (i = 1,2)$，取 $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$，则$[x,\alpha) \subset G_1 \cap G_2$。因此$(R,\tau)$是一个拓扑空间（实数下限拓扑空间）它与欧氏空间 R^1 有很大的区别。

例 6 X 为实数集合，$\tau = \{\emptyset, X - C \mid C$是 X 中的至多可数集，即 $\emptyset$、有限集或可数集$\}$。由 de morgan 公式可验证，τ 是一个拓扑（余集拓扑）。事实上，(1^0) $X, \emptyset \in \tau$ 显然。(2^0)若 $G_A, G_B \in \tau$，即有 C_A, C_B 至多可数，使 $G_A = X - C_A, G_B = X - C_B$，于是 $G_A \cap G_B = (X - C_A) \cap (X - C_B) = X - (C_A \cup C_B)$，即 $G_A \cap G_B \in \tau$。(3^0)若 $G_\alpha \in \tau (\alpha \in I)$，即有 C_α 至多可数，使 $G_\alpha = X - C_\alpha (\alpha \in I)$。于是 $\bigcup_\alpha G_\alpha = \bigcup_\alpha (X - C_\alpha) = X - \bigcap_\alpha C_\alpha \in \tau$。

定义 2 设(X,τ)为拓扑空间，$F \subset X$，若 $X—F$ 是开集，则称 F 为 X 的闭集。

拓扑空间的某一子集它可以是开集，又是闭集，也可以既不开又不闭。例如离散拓扑中，单点集既开又闭，而在平庸拓扑（多于两点）中，单点集既不开又不闭。这与人们的常识是相悖的。

我们也可以从闭集族出发定义拓扑空间（证明留作习题）。

关于 R^1，开始于开区间集，由此生成拓扑；度量空间的拓扑则由所有球形邻域通过并这一运算产生。这种方法在一般考虑中也用到，为此引进拓扑基的概念。

定义 3 设(X,τ)是拓扑空间，τ_* 是 τ 的子集族，如果 X 的任意开集均可表示为 τ_* 的某些成员之并，则称 τ_* 为拓扑空间 X 的一个拓扑基。

由定义知，τ_* 中的成员都是 X 的开集。此外，离散空间的单点集族为它的拓扑基。并且任何拓扑基均包含单点集族。已给集合 X 上的子集族 τ_*，在何条件下 τ_* 能成为 X 的某个拓扑的基？

显然应有 $X=\bigcup\limits_{B\in\tau_*}B$，但只有这一个条件还不行。例如 $X=\{a,b,c\}$，子集族 $\tau_*=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ 不能成为 X 上任何拓扑的基。事实上，如果 τ_* 为基，则开集 $\{a,b\},\{b,c\}$ 的交 $\{b\}$ 也是开集，但 $\{b\}$ 不是 τ_* 的元素之并。

下面的定理给出一个子集族成为某个拓扑的基的充要条件。

定理 1　X 的子集族 τ_* 成为 X 上某个拓扑的基的充要条件为：

$(1^0)\ X=\bigcup\limits_{B\in\tau_*}B$

(2^0) 对任意的 $B_1,B_2\in\tau_*$，$B_1\cap B_2$，能表为 τ_* 中某些成员的并（换言之，对任意 $x\in B_1\cap B_2$，存在 $B\in\tau_*$ $x\in B\subset B_1\cap B_2$，证明留给读者）。

证明　必要性。设 τ_* 是 X 某个拓扑 τ 的基，由 X 为开集即知 (1^0) 成立。因为 τ_* 中成员是 X 的开集，对任意 $B_1,B_2\in\tau$，$B_1\cap B_2\in\tau$。由基的定义，(2^0) 成立。

充分性。即证当 X 的子集族满足条件 (1^0)、(2^0)，作 τ_* 中成员的各种可能的并集，记其全体为 τ，则 (X,τ) 为拓扑空间。显然 $X\in\tau$，而形式上定义 $\varnothing=\bigcup\limits_{a\in\varnothing}B_a\in\tau$。其次，设 $G\in\tau$，则存在 $\tau_G\subset\tau_*$ 使得 $G=\bigcup\limits_{G\in\tau_G}B$，则 $\bigcup\limits_{G\in\tau}G=\bigcup\limits_{G\in\tau}\left[\bigcup\limits_{B\in\tau_G}B\right]=\bigcup\limits_{B\in\bigcup\limits_{G\in\tau}}B\in\tau$。

第三，设 $G_1,G_2\in\tau$，不妨设 $G_1\cap G_2\neq\varnothing$，对任意 $x\in G_1\cap G_2$ 由 τ 的作法，存在 $B_1,B_2\in\tau_*$，使得 $x\in B_1\subset G_1$，$x\in B_2\subset G_2$，从而 $x\in B_1\cap B_2\subset G_1\cap G_2$。由条件 (2^0)，存在 $B_x\in\tau_*$ 使得 $x\in B_x\subset B_1\cap B_2\subset G_1\cap G_2$，因此 $G_1\cap G_2=\bigcup\limits_{x\in G_1\cap G_2}\{x\}\subset\bigcup\limits_{x\in G_1\cap G_2}B_x$，另一方面，$\bigcup\limits_{B_x\in G_1\cap G_2}B_x\subset G_1\cap G_2$，即 $G_1\cap G_2=\bigcup\limits_{x\in G_1\cap G_2}B_x\in\tau$。

定理中的 τ 称为由基 τ_* 生成的拓扑，显然，这样的拓扑是唯一的。

例 7 在例 5 中，X 为实数集合，取 $\tau_* = \{[x,\alpha) \mid \alpha > x\}$，则 τ_* 是实数下限拓扑空间的基。事实上，$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n)$，并且当 $x \in [x_1,\alpha_1) \cap [x_2,\alpha_2)$ 时，必有 $x \in [\max\{x_1,x_2\},\min\{\alpha_1,\alpha_2\}) \subset [x_1,\alpha_1) \cap [x_2,\alpha_2)$，即 τ_* 满足定理 1 中条(1)，(2)。

例 8 $X = \{a,b,c,d\}$ $\tau_* = \{\emptyset,\{b\},\{d\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$，取 τ_* 中各种可能的并集，得 $\tau = \{\emptyset,\{b\},\{d\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c\},X\}$，则 (X,τ) 为由 τ_* 生成的拓扑空间。

习 题

1.(1)$X = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，令 $A_i = \{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$，$i = 1,2,\cdots,n$。证明 $\tau = \{\emptyset,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 X 上的拓扑。(2)X 为自然数集，$N_n \doteq \{n,n+1,\cdots\}$，$n = 1,2,\cdots$。$\tau = \{\emptyset,N_1,N_2,\cdots,N_n,\cdots\}$ 为 X 上的拓扑。

2.设 (X,τ) 是拓扑空间，$Y \subset X$，令 $\tau_Y = \{H \mid H = G \cap Y, G \in \tau\}$，证明 (Y,τ_Y) 是拓扑空间。

3.设 (Y,τ_Y) 是拓扑空间 (X,τ) 的子拓扑空间，证明如果 Y 是 X 的开(闭)子集，则 Y 的开(闭)子集也是 X 的一个开(闭)子集，举例说明“Y 是 X 的开(闭)子集”这一条件不能去掉。

4.举例说明任意个开集的交集不一定是开集，而任意个闭集的并集不一定是闭集。

5.考虑 R^1 上具有子空间拓扑的子集 $Y = [0,1] \cup (2,3)$，证明 $[0,1]$ 和 $(2,3)$ 分别是 Y 中既开又闭的子集。

6.证明拓扑空间 (X,τ) 的闭集族 σ 具有下列三条性质：

(1^0) $X,\emptyset \in \sigma$，

(2^0) 如果 $F_\alpha \in \sigma$，则 $\bigcap_\alpha F_\alpha \in \sigma$，

(3^0)　　如果 $F_1, F_2 \in \sigma$，则 $F_1 \cup F_2 \in \sigma$。

反之，设 σ 是 X 的一个子集族，且满足上述三个条件，则存在 X 的唯一的一个拓扑，使得拓扑空间的闭集族就是 σ。

7. 令 (X, ρ) 为度量空间，令

$\tau_* = \{B(a, r) \mid a \in X, r$ 为正有理数$\}$

证明 τ_* 是 X 的一个拓扑基。

8. τ_* 为 X 的子集族，证明"对任意的 $B_1, B_2 \in \tau_*$，$B_1 \cap B_2$ 能表为 τ_* 中某些成员的并"等价于"对任意的 $x \in B_1 \cap B_2$ 是存在 $B \in \tau_*$，使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$。"

9. 证明：设 τ_* 为 (X, τ) 的开集族，τ_* 为 X 的拓扑基 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $x \in X$ 及 X 的每一邻域 U，有 $V \in \tau_*$ 使得 $x \in V \subset U$。

§3　拓扑空间的基本概念

原先数学里研究的对象的拓扑结构是借助距离给出的，往往把距离的概念提到最主要的地位。这一事实掩盖了拓扑空间的基本概念的作用。本节介绍的拓扑空间的基本概念均要求熟练掌握。作为拓扑学知识载体的数学语言，它既是数学思维的工具，又是数学思维的产物，读者应细心体会其简练、精确和形式化的特点。

3.1　内点和内部

设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，点 $x \in A$。如果存在开集 G，使得 $x \in G \subset A$，则称 x 是 A 的一个内点，A 的所有内点的集合称为 A 的内部，记作 $\overset{0}{A}$。

定理 1　X 为拓扑空间，对 X 的任意子 A, B 有：

(1^0)　　$\overset{0}{A} \subset A$，$\overset{0}{A}$ 是 A 中的关于 X 的最大开集，A 是 X 的开

集$\Leftrightarrow A=\overset{0}{A}$。

(2⁰) $(A\cap B)=\overset{0}{A}\cap\overset{0}{B}$;

(3⁰) $(A\cup B)^0\supset\overset{0}{A}\cup\overset{0}{B}$;

证明 (1^0)由定义。$\overset{0}{A}\subset A_0$ 对任意的 $x\in\overset{0}{A}$,存在 $G_x\in\tau$,使 $x\in G_x\subset A$, $\forall y\in G_x$, $y\in\overset{0}{A}$ 因而 $G_x\subset A$, $\overset{0}{A}=\bigcup\limits_{x\in A}G_x$ 为开集。此外,如果 $G\subset A$ 是X 的开集,对任意的 $x\in G$,存在 $G_x=G\subset A$, $x\in\overset{0}{A}$,即 $G\subset\overset{0}{A}$,这证明了 $\overset{0}{A}$ 的最大性。最后,当 A 是 X 的开集,即 A 是 X 的 A 中的最大开集,因此,$A=\overset{0}{A}$,若 $A=\overset{0}{A}$, $\overset{0}{A}$ 是开集,于是 A 是开集。

(2^0)由 $A\cap B\subset A$,由(1^0)知$(A\cap B)^0\subset\overset{0}{A}$,同理$(A\cap B)^0\subset B^0$,于是$(A\cap B)^0\subset\overset{0}{A}\cap\overset{0}{B}$。另一方面,由 $\overset{0}{A}\cap\overset{0}{B}\subset A\cap B$,得 $\overset{0}{A}\cap\overset{0}{B}=(\overset{0}{A}\cap\overset{0}{B})^0\subset(A\cap B)^0$,于是$(A\cap B)^0=\overset{0}{A}\cap\overset{0}{B}$。

(3^0)由于 $\overset{0}{A}\cup\overset{0}{B}$ 是包含在 $A\cup B$ 中的开集,于是 $\overset{0}{A}\cup\overset{0}{B}\subset(A\cup B)^0$。

注意,一般地(3^0)不能改为等号,例如,A 为开区间$(0,1)$,B 为半闭半开区间$[1,2)$,则 $\overset{0}{A}\cup\overset{0}{B}=(0,1)\cup(1,2)$而$(A\cup B)^0=(0,2)$,两者不相等。读者还可考虑以 R^1 的子空间全体有理数的内部 $\overset{0}{Q}$ 和全体无理数的内部 $\overset{0}{I}$ 为反例的情形。

如果 x 是 $\sim A$ 的一个内点,则称 x 为A 的外点。A 的外点全体称为A 的外部,记作 $A^e=(\sim A)^0$。如果 x 既不是A 的内点,又不是 A 的外点,即 x 的任何邻域既有A 的点,又有 $\sim A$ 的点,则称 X 是A 的边界点。集合 A 的边界点的全体称为A 的边界,记作 ∂A。

显然，$X=\overset{0}{A}\cup(\sim A)^0\cup\partial A$，于是，$\partial A=\sim(\overset{0}{A}\cup(\sim A)^0)$。

例 1 $X=\{a,b,c,d,e\}$，$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$，$X$ 的子集 $A=\{b,c,d\}$，则 $\overset{0}{A}=\{c,d\}$。又 a 是 $\sim A=\{a,e\}$ 的内点，即 $A^e=\{a\}$，而 $\partial A=\{b,e\}$。

例 2 考察实数空间子空间有理数集 Q，则 Q 既无内点又无外点，$\overset{0}{Q}=\emptyset$，$Q^e=\emptyset$，$\partial Q=R$。而 $B=\{\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,\cdots$，则 $\partial B=B\cup\{0\}$，这说明一个集合可以包含于其边界之中。

3.2 聚点和闭包

A 是拓扑空间 X 的一个子集，点 $x\in X$。如果 x 的在 X 中的任一邻域 U 都包含 $A-\{x\}$ 的一个点，即 $U\cap(A-\{x\})\neq\emptyset$，则称 x 为 A 的聚点(点 x 不一定属于 A)。集合 A 的所有聚点为 A 的导集，记作 A^d(或 A')，而 $A\cup A^d$ 称为 A 的闭包，记作 $\overline{A}$。显然 $\overset{0}{A}\subset A\subset\overline{A}$，并且 $x\in\overline{A}\Leftrightarrow$点 x 的任一邻域 U 有 $U\cap A\neq\emptyset$。如果 $\overline{A}=X$，则称 A 为 X 的稠密子集。

由定义，若 $A\subset B$，$A^d\subset B^d$，$\overline{A}\subset\overline{B}$，并且有 A 是闭集$\Leftrightarrow\overline{A}=A$(证明留作习题)。

定理 2 X 为拓扑空间，对 X 的任意子集 A,B 有

(1^0) $\overline{A}$ 是所有包含 A 的闭集的交集，所以是包含 A 的最小的闭集。

(2^0) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(3^0) $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。

证明 (1^0)设 σ 为 X 的全体闭集族，$A\subset(\bigcap_{F\in\sigma\ F\supset A}F)$，后者是闭集，因此 $\overline{A}\subset\overline{(\bigcap_{F\in\sigma\ F\supset A}F)}=\bigcap_{F\in\sigma F\supset A}F$，另一方面，$\overline{A}$ 是闭集，且 $\overline{A}\supset A$，故 $\overline{A}\supset\bigcap_{F\in\sigma F\supset A}F$，从而 $\overline{A}=\bigcap_{F\in\sigma\ F\supset A}F$。

(2^0)先证$(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$，由于$A,B\subset A\cup B$，故$A^d,B^d\subset(A\cup B)^d$，即$A^d\cup B^d\subset(A\cup B)^d$。另一方面若$x\overline{\in}A^d\cup B^d$，即$x\overline{\in}A^d$且$x\overline{\in}\cup B^d$，于是存在x的邻域$U$、$V$，分别使得$U\cap(A-\{x\})=\varnothing$和$V\cap(B-\{x\})=\varnothing$. $W=U\cap V$为x的邻域，且$W\cap(A-\{x\})=\varnothing$，$W\cap(B-\{x\})=\varnothing$，则

$W\cap((A\cup B)-\{x\})=W\cap((A-\{x\})\cup(B-\{x\}))=(W\cap(A-\{x\}))\cup(W\cap(B-\{x\}))=\varnothing$ 即$x\overline{\in}(A\cup B)^d$由逆否命题知，$x\in(A\cup B)^d\Rightarrow x\in A^d\cup B^d$。因此，$(A\cup B)^d\subset A^d\cup B^d$这说明$(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$。

再证$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。事实上，$\overline{A\cup B}=(A\cup B)\cup(A\cup B)^d=A\cup B\cup A^d\cup B^d=A\cup A^d\cup B\cup B^d=\overline{A}\cup\overline{B}$。

(3^0)由$(A\cap B)^d\subset A^d\cap B^d$(证明留给读者)，易知$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。

一般地(3^0)不能改为等号，请读者自举反例。

例3 $X=\{a,b,c,d,e\}$，$\tau=\{\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$，$X$的子集$A=\{a,b,c\}$，则$b,d,e$是$A$的聚点，且$A^d=\{b,d,e\}$，$\overline{A}=\{a,b,c,d,e\}$。而对单点集$\{b\}$，$\overline{\{b\}}=\{b,e\}$。此外$\overline{\{a,c\}}=X$，$\overline{\{b,d\}}=\{b,c,d,e\}$。并且$A$和$\{a,c\}$在$X$中稠密。

注意，在欧氏空间中的聚点(极限点)的情形与一般拓扑空间的情形有很大区别，例如，开区间$A=(a,b)$的聚点a的近旁确实聚集了A的无穷多个点，因而有限集是没有聚点的，而例3说明在拓扑空间中则不然。

下面的定理说明内集、边界和闭包之间的关系。

定理3 设A是拓扑空间X的任意子集，则$\overline{A}=\overset{0}{A}\cup\partial A$。

证明 先证$\overset{0}{A}=\sim\overline{(\sim A)}$事实上，若$x\in\overset{0}{A}$，则$x\overline{\in}\overline{(\sim A)}$，所以$\overset{0}{A}\subset\sim\overline{(\sim A)}$，另一方面，若$x\in\sim\overline{(\sim A)}$则$x\overline{\in}\overline{(\sim A)}$，即$x$有一邻域$U$，使$U\cap(\sim A)=\varnothing$，即$U\subset A$，所以$x\in\overset{0}{A}$，这证明$\sim\overline{(\sim A)}$

$\subset \overset{0}{A}$。因此，$\overset{0}{A} = \sim \overline{(\sim A)}$，此外，由边界点的定义易知 $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(\sim A)}$（证明留给读者），于是

$$\overset{0}{A} \cup \partial A = \overset{0}{A} \cup (\overline{A} \cap \overline{(\sim A)}) = (\overset{0}{A} \cup \overline{A}) \cap (\overset{0}{A} \cup \overline{(\sim A)})$$

$$= \overline{A} \cap (\overset{0}{A} \cup (\sim \overset{0}{A})) = \overline{A} \cap X = \overline{A}。$$

此外还有以下关系式：

$(1^0)(\sim A)^0 = \sim \overline{A}$，即 $\overline{A} = \sim (\sim A)^0$；

$(2^0)\partial A = \partial(\sim A) = \sim (\overset{0}{A} \cup (\sim A)^0)$

$(3^0)\overset{0}{A} = \overline{A} - \partial A$

例 4 设 $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ $A_i = \{a_1, \cdots, a_i\}(i = 1, 2, \cdots n)$，$\tau = (\emptyset, A_1, \cdots, A_n)$。则 $\{a_1\}^0 = \{a_1\}$，$\{a_i\}^0 = \emptyset(i = 2, 3, \cdots, n)$，$\{a_2, \cdots, a_n\}^0 = \emptyset$；

$\{a_1\}^d = \{a_2, \cdots, a_n\}$，$\overline{\{a_1\}} = X$，即 $\{a_1$ 在 X 中稠密。

$\partial\{a_1\} = \{a_2, \cdots, a_n\}$，$\partial\{a_i\} = \{a_i, \cdots, a_n\}(i = 2, 3, \cdots, n)$，事实上，当 $i \geqslant 2$ 时，

$\partial\{a_i\} = \sim (\{a_i\}^0 \cup \{a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n\}^0) = \sim \{a_1, \cdots, a_{i-1}\} = \{a_i, \cdots, a_n\}$。

3.3 拓扑空间中的序列

设 (X, τ) 为拓扑空间，$x_n, x \in X$，如果对于 x 的每个邻域 $U(x)$，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $x_n \in U(x)$，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ 或 } x_n \to x(n \to \infty)$$

这时称 $\{x_n\}$ 为收敛点列，x 为 $\{x_n\}$ 的极限。

注意点列的极限不是用距离而是用环境（邻域）来描述，因此，这是比度量空间更一般的极限理论。

例如，对于 $x = \{a_1, a_2, \cdots\}$，取 X 的平庸拓扑，则 $\{a_n\}$ 收敛于

X 的任意一点，即 $\{a_n\}$ 的极限不唯一。

易知，X 为拓扑空间，$A \subset X$，$x \in X$，若在 $A - \{x\}$ 中有序列收敛于 x，则 x 为子集 A 的聚点；此外，若 $A \subset X$ 是闭集，对 A 中任何点列 $\{x_n\}$，如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$，则 $x \in A$。（证明均留给读者），但以上命题的逆命题均不成立。

例 5 设 $X = \{a, b, c\}$，$\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$，令 $A = \{a\}$，$x_n = a$ 为 A 中仅有的点列，$x_n \to a \in A$，但 A 为开集；由于 $\sim A = \{b, c\}$，A 的确不是闭集。

例 6 $X = [0,1]$ 为不可数集，$\tau = \{\sim C : C$ 为 X 的至多可数子集$\} \cup \{\varnothing\}$，如果 $\lim\limits_{n \to \infty} = x$，则存在自然数 N，当 $n > N$ 时，$x_n \equiv x$。事实上，对 x 在 X 中的邻域 $(X - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x_n\}) \cup \{x\}$，必存在自然数 N，当 $n > N$ 时，$x_n \in (X - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x_n\}) \{x\}$。所以 $x_n \equiv x$。

另外，$A \subset X$ 为不可数子集，对任意 $x \in X$ 和 x 在 X 中的任何邻域，$U(x) = X - C$（C 至多可数），$(X - C) \cap (A - \{x\}) = (A - \{x\}) - C = A - (C \cup \{x\}) \neq \varnothing$，即 x 为 A 的聚点，于是 $A^d = X$，对任一 $x \in X - A$，$x \in A^d$，显然 $A - \{x\}$ 中不存在序列收剑于 x。还有，若令 $A = X - \{0\}$，若 $x_n \in A$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$，存在 N，当 $n > N$ 时，$x_n \equiv x$，即对 A 中任何收敛点列，其极限属于 A，但 A 不是闭集（为什么?）。

习 题

1. 证明：A 是闭集 $\Leftrightarrow \overline{A} = A$。
2. 证明：$(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d$。
3. 证明：$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(\sim A)}$。
4. X 为自然数集 N，$A_n = \{n, n+1, \cdots\}$，$n = 1, 2, \cdots$。$\tau = \{\varnothing,$

$A_1, A_2, \cdots\}$，求 $(A_i)^0$，$i=1,2,\cdots$，∂A_1 和 ∂A_i，$i\geqslant 2$。$\overline{\{a\}}$，$\overline{\{b\}}$，$\partial\{a\}$，$\partial\{b\}$。

5. $X=\{a,b\}$，$\tau=\{\emptyset, X, \{a\}\}$，求 $\{a\}^0$，$\{b\}^0$；$\{a\}^d$，$\{b\}^d$，$\overline{\{a\}}$，$\overline{\{b\}}$；$\partial\{a\}$，$\partial\{b\}$。

6. $X=\{a,b,c\}$，$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$，取 $x_n\equiv a$，证明$\{x_n\}$以 X 中任何点为极限。

7. (X,τ)为拓扑空间，$A\subset X$ 为闭集，对 A 中任何点列$\{x_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则 $x\in A$。

8. (X,ρ)为度量空间，证明：

(1)收敛点列$\{x_n\}$的极限是唯一的。

(2)$A\subset X$，x 为 A 的聚点$\Leftrightarrow x$ 的任何邻域中必包含 A 的无限个点$\Leftrightarrow A-\{x\}$中存在点列$\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

(3)$A\subset X$，A 中任何点列$\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 且 $x\in A$，则 A 为闭集。

9. 设 R^2 中 $A=\{(x,y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x}, 0<x\leqslant\dfrac{2}{\pi}\}$，$B=\{(0,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$，讨论 $\overline{A}$(拓扑正弦曲线)。

10. (X,ρ)为度量空间，证明：

(1)$A\subset X$，$A\neq\emptyset$，则 $\rho(x,A)=0\Leftrightarrow x\in\overline{A}$，即 $\rho(x,A)>0$，$\Leftrightarrow x\in\overline{A}$。特别地，当 A 为闭集，$\rho(x,A)=0\Leftrightarrow x\in A$；

(2)若 $A,B\subset X$，$\overline{A}\cap\overline{B}\neq\emptyset$，则 $\rho(A,B)=0$；

(3)考察 R^2 上的两个子集：$A=\{(x,y)\mid xy\leqslant -1, x<0\}$，$B=\{(x,y)\mid xy\geqslant 1, x>0\}$，$A\cap B=A\cap\overline{B}=\emptyset$，但 $\rho(A,B)=0$。即(2)的否命题不成立。

§4 连续映射和同胚

研究图形在全体合同变换下不变的性质(例如长度、角度和面

积等)构成欧氏几何学。研究图形在全体仿射变换下不变的性质(例如简比、平行、平行线段之比、面积比)构成仿射几何学。研究图形在全体射影变换下不变的性质(例如交比、同素性、结合性)构成射影几何学。使用齐次坐标,则射影变换对应于一个三阶非奇异矩阵,即射影变换群是可以用线性变换为代表的最广泛的几何线性变换群。那么,有没有比射影变换更广泛的变换呢?当然有,例如拓扑变换就是一个。研究图形拓扑性质(例如可数性、分离性、连通性、紧性等)的几何学叫做拓扑学,它现在已发展为以抽象形式研究空间连续性的学科。拓扑变换允许图形任意扭曲、弯折、拉伸和压缩,只要不撕破(撕破会使靠近的点变成不靠近),不粘合(粘合会使不靠近的点变成靠近),用数学语言来描述,则拓扑变换是一一在上的、连续的且逆映射也连续的变换。因此,连续性概念是拓扑学中最基本的概念。

4.1 连续映射

定义 1 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)为拓扑空间,$f: X\to Y$是一个映射,$x_0\in X$,如果$f(x_0)$的任何邻域$V(f(x_0))\subset Y$,必存在x_0的邻域$U(x_0)\subset X$,使得$f(U(x_0))\subset V(f(x_0))$,则称$f$在点$x_0$连续。

如果f在X的每点都连续,称f为连续映射。

定理 1 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)都是拓扑空间,$f: X\to Y$是映射,则下面四个条件等价:

(1^0) f是连续映射;

(2^0) Y中每个开集的原象是X中的开集;

(3^0) Y中每个闭集的原象是X中的闭集;

(4^0) 对任意$A\subset X$,$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$。

证明 $(1^0)\Rightarrow(2^0)$设V是Y中的一个开集,任取$x\in f^{-1}(V)$,则V是$f(x)$的邻域,由f的连续性,存在x的邻域$U(x)$,使得$f(U(x))\subset V$,即$U(x)\subset f^{-1}(V)$,所以

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U(x)\subset f^{-1}(V)}U(x)\subset f^{-1}(V)$$

这说明 $f^{-1}(V)=\bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)}U(x)$ 为 X 中的开集。

$(2^0)\Leftrightarrow(1^0)$ 对任意 $x\in X$，V 是含 $f(x)$ 的任一开集。由 (2^0)，$U=f^{-1}(V)$ 是含 x 的开集，为 x 的邻域，且 $f(U)\subset V$，所以 f 在 x 连续。

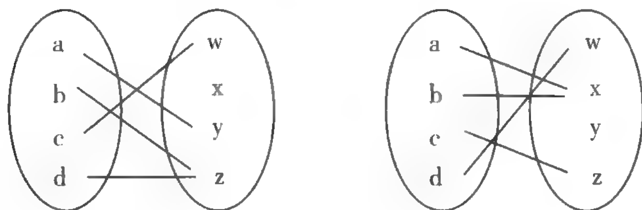
$(2^0)\Leftrightarrow(3^0)$ 由 $f^{-1}(Y-G)=X-f^{-1}(G)$（G 为 Y 中开集），直接推出。

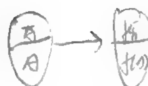
$(3^0)\Rightarrow(4^0)$ 对任意的 $A\subset X$，由 $f(A)\subset\overline{f(A)}$ 得 $A\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$。由 (3^0) $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是闭集，因此，$\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$，即 $f(\overline{A})\subset\overline{(f(A))}$。

$(4^0)\Rightarrow(3^0)$ 设 F 是 Y 中闭集，由 (4^0) $f(\overline{f^{-1}(F)})\subset\overline{f(f^{-1}(F))}\subset\overline{F}=F$，其中第二个包含关系是由于 $f(f^{-1}(F))\subset F$ 的缘故。所以 $\overline{f^{-1}(F)}\subset f^{-1}(F)$。这说明 $f^{-1}(F)=\overline{f^{-1}(F)}$ 为闭集。

连续映射只是反射开集，并不一定将开集映为开集（开映射），而开映射不一定连续。例如，τ_1,τ_2 是集合 X 上的两个拓扑，恒等映射 $id_X:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ 连续 $\Leftrightarrow\tau_2\subset\tau_1$（证明留作习题）。显然，$id_X$ 为开映射 $\Leftrightarrow\tau_1\subset\tau_2$。于是当 $\tau_1\neq\tau_2$ 时，开映射 id_x 不连续。

例 1 集合 $X=\{a,b,c,d\}$ 和 $Y=\{w,x,y,z\}$ 上的拓扑分别为：





$\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\}$

$\tau' = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{w,y,z\}, Y\}$

考察由上面两个图形表示的映射 $f: X \to Y$ 和 $g: X \to Y$。则 f 是连续的，g 不连续（不反射每个开集）。

例 2 从离散空间到任一拓扑空间的任何映射都是连续的。从多于两点的平庸拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 连续 $\Leftrightarrow$ 对 Y 中任何开集 G，且 $G \cap f(X) \neq \varnothing$ 时，则有 $f(X) \subset G$。特别地，当 Y 为度量空间时，映射 f 连续 $\Leftrightarrow f$ 是常值映射（证明留作习题）。

设映射 $f: X \to Y$ 及点 $x \in X$ 若对拓扑空间 X 中任何收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$，均有拓扑空间 Y 中序列 $\{f(x_n)\} \to f(x)$，$(n \to \infty)$，则称映射 f 在点 x 序列连续。显然，$f: X \to Y$ 在点 $x \in X$ 连续 $\Rightarrow f$ 在点 x 序列连续（证明留作习题），但反之不成立。因此，分析学中具有重要作用的序列收敛的概念不能用来刻画连续性，从而失去了它在拓扑学中的重要性。

例 3 设 X 为实数集 R，$\tau = \{\sim C \mid C$ 为 X 的可数子集$\} \cup \{\varnothing\}$，考虑从 (X, τ) 到 R^1 的恒等映射 $id_x: X \to R^1$，如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$，令 $D = \{x_n \mid x_n \neq x, n \in N\}$，$D$ 为可数集，是闭集，于是 $\sim D$ 为 x 的开邻域，从而存在自然数 N，当 $n > N$ 时，$x_n \in \sim D$，即 $x_n \equiv x$，反之亦然。故若 $\{x_n\}$ 收敛于 x，必有 $\{id_x(x_n)\} = \{x_n\}$ 在实数空间 R^1 中收敛于 x。但映射 i 不是连续映射，因为 R^1 中的开区间 (a,b) 在 X 中都不是开集。

4.2 同　胚

定义 2 设 X, Y 为拓扑空间，映射 $f: X \to Y$ 是一一在上的，且 f 与其逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 都是连续的，则称 f 为同胚映射或拓扑映射。

如果存在一个同胚映射 $f: X \to Y$ 是一一在上的，则称拓空间 X 和 Y 是同胚的，记作 $X \cong Y$。

在任一同胚映射下保持不变的性质,称为拓扑性质。拓扑学的主要任务是研究空间的同胚与空间的拓扑性质。

例 4 $(1^0) f:(-\infty,+\infty)\to(a,b)$

$$y=f(x)=\frac{b-a}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{b+a}{2}$$

是一个同胚。

$(2^0) f: R^n\to \overset{0}{D}{}^n=\{x\in R^n \mid \|x\|<1\}$($n$ 维单位球 $D^n=\{x\in R^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$ 的内部),

$$y=f(x)=\frac{x}{1+\|x\|}$$

是一个同胚。于是,$\|y\|=\dfrac{\|x\|}{1+\|x\|}$,即 $\|y\|-\|x\|=-\|x\|\ \|y\|$,从而 $(1-\|y\|)(1+\|x\|)=1$,所以 $x=\dfrac{x}{(1-\|y\|)(1+\|x\|)}=\dfrac{y}{1-\|y\|}$ 为逆映射 $f^{-1}:\overset{0}{D}\to R^n$。

(3^0) 圆周和椭圆,圆周和正方形的边界,球面 S^2 去掉北极 $P=(0,0,1)$ 和平面 R^2 等均是同胚的。$S^2-\{P\}\cong R^2$ 在复变函数中是常见的,全体复数增加一个无穷远点就是球面 S^2。同胚能把一个难题转化为较简单的问题,例如一个代数函数的黎曼曲面和 S^2 是同胚的,这就能更方便地处理问题。

例 5 S^1 是复平面上的单位圆周,视为 R^2 的子空间。映射 $f:[0,1)\to S^1$ 定义为 $f(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$,显然 f 为一一在上的,连续,但 f^{-1} 不连续,事实上,$[0,\frac{1}{2})$ 是 $[0,1)$ 的开集,$(f^{-1})^{-1}([0,\frac{1}{2}])=f([0,\frac{1}{2}])$ 为包含 1 的上半圆,不是 S^1 的开集。因此,f 不是同胚。

例 6 说明,同胚映射中条件 f^{-1} 连续不可忽视。但考虑这一微小的限制条件,却对拓扑学的建立以致于数学的发展产生了重大的影响。

以下几个关于同胚的等价命题是显然的，证明均留给读者。

定理 2 设映射 $f:X\to Y$ 是一一在上的，以下命题等价：

(1^0) f 是同胚；

(2^0) f 连续而且是开映射；

(3^0) f 连续而且是闭映射；

(4^0) 对于任何 $A\subset X, f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$

定理 3 对任意拓扑空间 X,Y,Z 有

(1^0) X 与 X 同胚；

(2^0) 若 X 与 Y 同胚，则 Y 与 X 同胚；

(3^0) 若 X 与 Y 同胚，Y 与 Z 同胚，则 X 与 Z 同胚。

因此，在全体拓扑空间集合内，同胚关系是一个等价关系。这个等价关系将拓扑空间分成互不相交的等价类。下面给出判断同胚的简单做法。

例 6 映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$ 都连续，且 $g\circ f=id_X, f\circ g=id_Y$，则 $g=f^{-1}$，且 f 为同胚。

例 7 令同胚映射 $f:X\cong Y$，对于 X 的子空间 A，$f|_A$ 为同胚映射：$A\cong f(A)$。$f|_{X-A}:X-A\cong Y-f(A)$。

例 8 如果 $f:X\to Y$ 是连续单射，$f(X)$ 视为 Y 的子空间，而限制 f 的值域：$X\to f(X)$ 是同胚映射，就称 $f:X\to Y$ 是嵌入映射。显然，任意包含映射是嵌入。当 X 可嵌入 Y 中时，$f(X)$ 上的相对拓扑与由 f 诱导的拓扑是一致的，因此，X 可视为 Y 的子空间。

习 题

1. 证明以下关于构造连续函数的命题。

(1^0) 常值映射 $f:X\to Y$ 为 $f(x)=y_0, \forall x\in X$，f 为连续映射。

(2^0) 拓扑空间 X 上的恒等映射 id_X 是连续映射。

(3^0) 映射 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 均连续，则 $g\circ f:X\to Z$ 也是连

续映射。

$(4^0)f: X\to Y$ 连续，$A\subset X$ 为 X 子空间，则 $f|_A A\to Y$ 也连续（提示：$f|_A=f\circ i$，这里 $i: A\to X$）。

$(5^0)f: X\to Y$ 连续，$f(X)\subset Y$ 为 Y 的子空间，则 $f: X\to f(X)$ 也连续。

(6^0)设 A,B 为拓扑空间 X 的开（闭）子空间，$A\cup B=X$。$f_1: A\to Y, f_2: B\to Y$ 分别为从 A,B 到拓扑空间 Y 中的连续映射，且 $\forall x\in A\cap B, f_1(x)=f_2(x)$。定义映射 $f: X\to Y$ 为：

$f(x)=\begin{cases}f_1(x), x\in A,\\ f_2(x), x\in B,\end{cases}$ 则 f 为连续函数（粘接引理）。

2. τ_1,τ_2 是集合 X 上的两个拓扑，恒等映射 $id_X(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ 连续的充要条件是 $\tau_2\subset\tau_1$。

3. 证明：X 为多于两点的平庸拓扑空间，$f: X\to Y$ 连续$\Leftrightarrow$对 Y 中任何开集 G，且 $G\cap f(X)\neq\emptyset$ 时，则有 $f(X)\subset G$。特别地，当 Y 为度量空间时，f 连续$\Leftrightarrow f$ 为常值映射。

4. $f: X\to Y$ 在点 $x\in X$ 连续，则 f 在点 x 序列连续。

5. 设(Y,τ_2)为拓扑空间，X 是一个集合，$f: X\to Y$ 是映射。令

$$\tau_1=\{f^{-1}(G)\mid G\in\tau_2\}$$

则(X,τ_1)为一个由映射 f 诱导的拓扑空间，且 f 连续。若另有 X 上的拓扑 τ 使得 $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_2)$连续，则 $\tau_1\subset\tau$，即由映射 f 诱导的拓扑是使 f 连续的这类拓扑中最小的一个。特别地，$X\subset Y$，$i: X\to Y$ 是包含映射，令 $\tau_1=\{i^{-1}(G)\mid G\in\tau_2\}=\{X\cap G\mid G\in\tau_2\}$，则$(X,\tau_1)$就是$(Y,\tau_2)$的子拓扑空间。同样地，相对拓扑是使包含映射 i 连续的最小的一个。

6. 证明定理 2 中的四个等价命题。

7. 说明同胚映射 $f: R^n-\{0\}\to R^n-D^n, f(x)=x+\frac{x}{\|x\|}$ 的几何意义。

§5 可数性公理与分离性公理

为了对拓扑空间进行更深入的研究,比如是否一个拓扑空间可度量化等问题(本质上是拓扑学问题),我们引入可数性与分离性,它们在改善拓扑空间的性质方面已走得很远,如 Urysohn 引理、Tietze 扩张定理和度量化定理。

5.1 可数性公理

定义 1 空间 X 称为在点 x 处有局部基,如果存在 x 的邻域族 $\tau_*(x)=\{G_a\}$ 它对 x 的任何邻域 G,都有 $G_a\in\tau_*(x)$,使得 $x\in G_a\subset G$。如果在空间 X 的每一点处都有可数局部基,则称 X 为 A_1 空间,或称 X 满足第一可数性公理。

显然,每一度量空间均是 A_1 空间(证明留作习题)。

例 1 余集拓扑空间 X 不是 A_1 空间。反证法,设 $x\in X$, $\{X-C_n\mid G_n$ 是至多可数集, $n=1,2,\cdots\}$ 是 x 处的一个可数的拓扑基,因 X 不可数,存在 $a\in X$, $a\neq x$, $a\overline{\in}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$, $X-\{a\}$ 是 x 的一个邻域。由 $a\in X-C_n$ 但 $a\overline{\in}X-\{a\}$ 知 $X-C_n\not\subset X-\{a\}(n=1,2,\cdots)$,这与 $\{X-C_n\}$ 是 x 处的拓扑基相矛盾,于是 X 不是 A_1 空间。

上例说明定义 A_1 空间是合理的。

定义 2 如果拓扑空间 X 具有可数拓扑基,则称它为 A_2 空间,或称满足第二可数性公理。

显然 A_2 空间必是 A_1 空间。设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个可数拓扑基,则 $\mathscr{B}$ 中包含点 x 的那些基元素所组成的子族就是 x 处的可数局部基 $\tau_*(x)$,反之不成立。

例 2 设 X 为不可数的离散空间($X,\tau_{离散}$),X 的任何子集既

是开集又是闭集,因为 X 的任一拓扑基必须包含所有的独点集,所以 X 不是 A_2 空间。但独点集 $\{x\}$ 显然形成 x 处的一个可数拓扑基,X 是 A_1 空间。

例 2 说明第二可数性公理比第一可数性公理强得多,甚至于并不是每一度量空间都能满足它。事实上,第一可数性公理是 X 的局部性质,而第二可数性公理是 X 的整体性质。

显然两个可数性公理对于取子空间都能得到保持,即 $A_1(A_2)$ 空间的每一子空间仍为 $A_1(A_2)$空间。

若空间 X 的子集 $\overline{A}=X$,称 A 在 X 中稠密。X 有可数稠密子集称 X 是可分空间。

例如,离散空间 X 为可数,则 X 为可分空间,(证明留作习题)

定理 1 拓扑空间 X 为 A_2 空间 $\Rightarrow X$ 是可分空间,反之不成立。

证明 设 $\{G_n \mid n=1,2,\cdots\cdots\}$ 是 X 的可数拓扑基,$A=\{a_n \mid a_n \in G_n\}$,则 A 即为 X 的可数稠密子集。事实上,对任何 $x\in X$ 和 x 的邻域 G,因为 X 为 A_2 空间,有 G_{n0} 使得 $x\in G_{n0}\subset G$,于是 $a_{n0}\in G$,即 $G\cap A\neq\emptyset$,$x\in\overline{A}$,即 $X=\overline{A}$。

例 3 Y 是不含 x 的不可数集,令 $X=\{x\}\cup Y$,$\tau=\{\emptyset,\{x\}\cup A \mid A\subset Y\}$,容易验证$(X,\tau)$是 Y 加一点的拓扑空间(证明留作习题)。且 $\forall\, y\in X$,y 的邻域 $U(y)\cap\{x\}\neq\emptyset$,即 $\overline{\{x\}}=X$。所以 X 是可分空间。但由于(X,τ)的任何拓扑基必包含开集族 $\{\{x\}\cup\{y\} \mid y\in Y\}$,不可数,$(X,\tau)$不是 A_2 空间。

虽然可分空间比 A_2 空间广泛,就其重要性而言,稠密性不及第二可数性公理,但也有自身存在的价值,例如稠密性在分析学中的用处。又如 A 为拓扑空间 X 的稠密子集,$f,g:X\to R^1$ 为连续映射,则 $f=g$ 当且仅当 $f|_A=g|_A$(证明留作习题)。

定理 2 可分的度量空间为 A_2 空间。

证明 设(X,ρ)为可分的度量空间,A 为 X 的可数稠密子集,

令 $\tau_* = \{B(x, \frac{1}{n}), x \in A, n \in N\}$，则 τ_* 为 X 的可数开集族，下面验证 τ_* 为 X 的基。

对于 X 的任一开集 U，$y \in U$，则有自然数 k，使得 $B(y, \frac{1}{k}) \subset U$。$A$ 稠密，故 $B(y, \frac{1}{2k}) \cap A \neq \emptyset$。任取 $y' \in B(y, \frac{1}{2k}) \cap A$，若 $z \in B(y', \frac{1}{2k})$，则 $\rho(z, y') < \frac{1}{2k}$。于是 $\rho(z, y) \leqslant \rho(z, y') + \rho(y', y) < \frac{1}{k}$，即 $z \in B(y, \frac{1}{k})$。于是 $y \in B(y', \frac{1}{2k}) \subset B(y, \frac{1}{k}) \subset U$ 这里 $y' \in A$，故 $B(y', \frac{1}{2k}) \in \tau_*$ 且 τ_* 为 (X, ρ) 的可数拓扑基。

拓扑空间 X 的每一开覆盖着包含一个可数子覆盖，称 X 为 Lindelöf 空间。可分空间和 Lindelöf 空间也被视为可数性公理。

类似地有，Lindelöf 的度量空间为 A_2 空间（证明留作习题）。

定理 3 A_2 空间 X 必为 Lindelöf 空间。

证明 设 $\eta = \{G\}$ 是 X 的一个开覆盖，X 为 A_2 空间，可这样挑选正整数 n：η 中能取到一个包含基元素 B_n 的成员 G_n，这样取得集合 $\eta' = \{G_n\}$ 为可数族，且 η' 覆盖 X。事实上，$\forall x \in X$ 有 $G \in \eta$，使 $x \in G$，G 为开集，于是有基元素 B_n，使得 $x \in B_n \subset G$，而 B_n 必包含在 η' 的成员 G_n 之中，$x \in G_n$。

可数性公理使拓扑空间具有很多重要的性质。

定理 4 设 X 为 A 空间，Y 为 X 的子集。点 $x \in X$ 为 Y 的聚点的充分必要条件是 $Y - \{x\}$ 中有序列收敛于 X。

证明 充分性的证明留作习题，下面仅证必要性。

设 x 为 Y 的聚点，易知点 x 有局部可数基 $\{V_1, V_2, \cdots\}$，且满足局部套基条件（证明留作习题）：

$$V_1 \supset V_2 \cdots \supset V_n \cdots$$

于是对每一 $i = 1, 2, \cdots$，由于 $V_i \cap (Y - \{x\}) \neq \emptyset$，任取 $x_i \in V_i$

$\cap(Y-\{x\})$,序列$\{x_i\}$在 $Y-\{x\}$中,对于 x 的每一邻域U,存在自然数 N,使得 $V_N\subset U$,从而当 $i>N$ 时,$U\supset V_N\cdots\supset V_i$,这说明 $i>N$ 时,$x_i\in U$,即 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x$。

定理 5 设 X,Y 为拓扑空间,且 X 为 A_1 空间。$f:X\to Y$ 在点 x 连续的充分必要条件是:若 X 中的序列$\{x_i\}$收敛于 x,则 Y 中的序列 $f(x_i)$收敛于 $f(x)$。

证　明 仅证充分性。反证法,若 f 在点 x 不连续,即 $f(x)$有一邻域 V,使 $f^{-1}(V)$不是 x 的邻域,即 x 的任一邻域 U 都不包含于$f^{-1}(V)$:$f(U)\subset V$ 不成立。于是 $f(U)\cap(\sim V)\neq\emptyset$。现令$\{U_1,U_2,\cdots\}$为满足 $U_1\supset U_2\cdots\supset U_n\supset\cdots$的点 x 的可数局部基,对于每一 $i=(i=1,2,\cdots)$,任取 $x_i\in U_i$,使得 $f(x_i)\in f(U_i)\cap(\sim V)$,则 $f(x_i)\overline{\in}V$。明显地,序列$\{x_i\}$收敛于 x,但 $f(x)$的邻域 V 中却没有序列$\{f(x_i)\}$中的任何点,即序列$\{f(x_i)\}$不收敛于 $f(x)$,矛盾。

定理 4 和定理 5 中的条件 X 为 A_1 空间不能去掉(参见 §3 例 6 和 §4 例 3)。

5.2　分离性公理

以下的性质之所以被称为分离性公理,是因为它们都涉及利用开集把特定集合彼此分离开来,这是对拓扑空间的附加条件。

定义 3 设 X 是拓扑空间,如果 X 的任意两个不同点中,至少有一点有一个邻域不包含另一点,称 X 为 T_0 空间。如果 X 的任意两个不同点各有一个邻域(不必互斥)不包含另一点,称 X 为 T_1 空间。如果 X 的任意两个不同点有不相交的邻域,称 X 为 T_2 空间或 Hausdorff 空间。

显然,以上分离公理是拓扑性质。多余两点的平庸空间不是 T_0 空间。这说明拓扑空间自然不必都是 T_0 空间。$X=\{a,b,c\}$,

$\tau=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$，则$(X,\tau)$是 T_0 空间，但不是 T_1 空间。有限余集拓扑空间是 T_1 空间，但不是 T_2 空间。度量空间是 T_2 空间，这在直观上就能理解(证明留作习题)，自然也是 T_1 空间。

下面的定理刻画出 T_1 空间的特征。

定理 5 拓扑空间 X 是 T_1 空间的充分必要条件是每一单点集是闭集。

证明 必要性。若 X 为 T_1 空间，$x\in X$，任给 $y\in X$ 且 $y\neq x$，y 都有开邻域 V，使得 $x\overline{\in} V$，即 $V\cap\{x\}=\varnothing$ 所以 $y\overline{\in}\overline{\{x\}}$。这说明 $\overline{\{x\}}=\{x\}$，即$\{x\}$是闭集。

充分性。任取 $x,y\in X$，且$\{x\},\{y\}$都是闭集，从而，$\sim\{y\}$，$\sim\{x\}$分别为 x,y 的开邻域，前者不包含 y，后者不包含 x，所以 X 为 T_1 空间。

X 为 T_2 空间的特征是，对拓扑空间 X 的每一点 x 的任何邻域 U，$\bigcap\{\overline{U}\mid U$ 是 x 的邻域$\}=\{x\}$(证明留作习题)。

拓扑空间中的点列$\{x_i\}$可以收敛于 X 中多个点，但当 X 是 T_2 空间时这种情形不会发生。

定理 6 T_2 空间的收敛点列只有一个极限点。

证明 反证法。设 T_2 空间的收敛点列$\{x_i\}$收敛于 y_1 和 y_2，$y_1\neq y_2$。y_1 和 y_2 分别有开邻域 U、V，使 $U\cap V=\varnothing$。对于 y_1 的邻域 U，当 $i>N_1$ 时，$x_i\in U$；对于 y_2 的邻域 V，当 $i>N_2$ 时，$x_i\in V$。当 $i>N_1+N_2$ 时，$x_i\in U\cap V$，$U\cap V\neq\varnothing$，矛盾。

X 为无限点集，$\tau=\{X-C\mid C$ 为 X 的有限集$\}\cup\{\varnothing\}$，易知(X,τ)为拓扑空间(有限余集拓扑空间)。设 U、V 为 X 任意两个非空开集，$U=X-C_1$，$V=X-C_2$(C_1、C_2 为有限集)，则 $U\cap V=X-(C_1\cup C_2)\neq\varnothing$，因此 X 不可能是 T_2 空间。但由于 X 的任一有限集是闭集，X 为 T_1 空间。

T_1 空间的收敛点列的极限却可以不唯一。例如 X 为有限余

集拓扑空间,设$\{x_i\}$为两两不相同的点组成的点列,不可数。任取$y\in X$,以及y的任一开邻域$U=\sim C$,令$N=\max\{j: x_i\in C\}$则当$i>N$时,$x_i\overline{\in} C$,即$x_i\in U$,这说明点列$\{x_i\}$收敛于X中任一点y。

若A和U为拓扑空间X的子集,如果$A\subset\overset{0}{U}$,称U是A的邻域。

定义 4 拓扑空间X中任意一点与不包含此点的任何一个闭集有不相交的邻域,则称X为正则空间。X的任意两个不相交闭集有不相交的邻域,则称X为正规空间。

正则空间和正规空间的特征也可以用下面的定理来刻画。

定理 7 X为正则空间的充分必要条件是,对于X的任一点x的每一邻域$U(x)$,必存在x的邻域$V(x)$,使得$\overline{V(x)}\subset U(x)$。$X$为正规空间的充分必要条件是,对$X$的任一闭集$F$的每一邻域$U(F)$,必存在$F$的邻域$V(F)$,使得$\overline{V(F)}\subset U(F)$。

证明 仅证正则空间的情形,正规空间的证明留作习题。

必要性。X为正则空间,对于X的任一点x与不包含x的闭集$F=X-U(x)$,各有一个邻域$V(x)$和$V(F)$,使得$V(x)\cap V(F)=\emptyset$,即$V(x)\subset X-V(F)$。于是,$\overline{V(x)}\subset\overline{X-V(F)}=X-V(F)\subset X-F=U(x)$。

充分性。任取X中的点x和闭集F,且$x\overline{\in}F$。则$U(x)=X-F$是x的一个邻域,由已知,存在x的邻域$V(x)$,使得$\overline{V(x)}\subset U(x)$。因为$U(x)\cap F=(X-F)\cap F=\emptyset$导致$\overline{V(x)}\cap F=\emptyset$,所以$X-\overline{V(x)}$是含$F$的邻域,且$V(x)\cap(X-\overline{V(x)}=\emptyset$,$X$为正则空间。

正则空间,正规空间与T_0,T_1,T_2空间并无蕴含关系。例如$X=\{a,b,c\}$,$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$,则$X$为正则和正规空间,但$X$不是$T_0$空间,因而也不是$T_1$,$T_2$空间。而取$X=\{a,b,c\}$,$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$,则$X$是正规空间但非正则空间的

例子。

正则的 T_1 空间称为 T_3 空间,正规的 T_1 空间称为 T_4 空间。由于 T_4 空间 X 的单点集$\{x\}$均为闭集,点 x 与X 中任一闭集均可分离,满足正则性质,所以 T_4 空间必为 T_3 空间,同样地,T_3 空间必为 T_2 空间。度量空间是正规空间(证明留作习题),T_1 空间,因此,度量空间是 T_4 空间。

以下定理只做介绍,开拓视野,证明从略。

一般来说,定义在拓扑空间上的非常值的连续函数不一定存在,但对于正规空间则不然,Urysohn 引理断言正规空间 X 上存在着某一连续实值函数。该引理的证明有相当的创造性,有兴趣的读者可参考有关拓扑学教材。

Urysohn(1898 ~ 1924)法国数学家,研究几何学、集合论、专精拓扑学,在抽象空间、维度理论及曲线理论各方面均有卓越贡献。

Urysohn 引理 拓扑空间为正规空间,当且仅当对 X 的任意两个不相交的闭集 A、B,存在连续映射 $f: X \to [0,1]$,使得对 A 中每一 x,$f(x)=0$,对 B 中每一 x,$f(x)=1$。连续实值函数 f 称为 Urysohn 特征函数。且称闭集 A、B 为f 所分离。Urysohn 引理说明任意一对不相交闭集为连续映射所分离是正规空间的特征。

分析学中有连续延拓定理:定义在 R^1 的某个闭集上的有界连续函数可延拓为 R^1 上的连续函数。对拓扑空间来说,延拓定理成立是有条件限制并且是少见的,但对正规空间则不然,利用 Urysohn 引理即可证明:

Tietze 扩张定理 对于任意给定的闭区间$[a,b]$,拓扑空间 X 为正规空间当且仅当对于X 的任意闭集A,以及 A 上任意连续映射$f_o: A \to [a,b]$,f_0 都有一个在 X 的连续扩张$f: X \to [a,b]$,且 $f|_A = f_0$。

对于 Urysohn 引理不能误解为引理中的连续函数 f 仅当$x \in A$ 时$f(x)=0$,仅当 $x \in B$ 时$f(x)=1$。此外,Urysohn 引理和 Tietze 扩

张定理是等价的。两个定理中闭集这个条件不能去掉，例如 $A=[0,1)$，$B=(1,2)$ 为 R^1 中不相交的两个子集（非闭集），显然，不存在连续映射 $f:R^1\to[0,1]$ 使得 $f(A)=\{0\}$，$f(B)=\{1\}$。

在引入了拓扑空间这一概念后，人们不禁要问，拓扑空间是否真的比度量空间更广泛一些呢？换言之，是否每一个拓扑空间都可以由 X 的某一度量诱导出来（这时称 X 可度量化）？这是拓扑学中一个经典的问题。容易知道，X 为有限集而 (X,ρ) 为度量空间，则 X 的每一子集都是开集，即 X 是离散空间。但平庸拓扑空间（含有限个点）不是离散空间，因此它并非可度量化。又如没有一个度量可导出 Sierpinski 空间。由此可见，拓扑空间的确比度量空间更广泛。因此，探索拓扑空间可度量化的条件成为拓扑学的一个重要问题。用 Urysohn 引理证明的 Urysohn 嵌入定理部分地回答了这个问题。

Urysohn 嵌入定理　满足第二可数性公理的 T_3 空间都同胚于 Hilbert 空间 R^∞ 的某一子空间。

不难证明，Hilbert 空间 R^∞ 是可分空间，因此是 A_2 空间，也为 Lindelöf 空间，于是下列条件等价：

(1^0)　X 为满足第二可数公理的 T_3 空间；

(2^0)　X 同胚于 Hilbert 空间 R^∞ 的某一子空间；

(3^0)　X 为可分的可度量化空间。

习　题

1. 证明度量空间空间 (X,ρ) 是 A_1 空间，并举例说明不必是 A_2 空间。

2. 证明有限拓扑空间和 R^n 都是 A_2 空间，可分空间。

3. 证明可数离散空间是可分空间。

4. Y 是不含 x 的集合，令 $X=\{x\}\cup Y$，$\tau=\{\emptyset,\{x\}\cup A\mid A\subset$

$Y\}$，验证(X,τ)是拓扑空间，并考虑可分空间是否必为A_2空间，可分空间的子空间是否仍为可分空间。

5. 证明A_2空间的子空间仍是A_2空间。

6. 证明可分度量空间的子空间仍是可分的。

7. X可分，A为X的稠密子集。$f,g:X\to R^1$为连续映射，证明$f=g$当且仅当$f|_A=g|_A$。

8. 证明Lindelöf的度量空间为A_2空间。

9. X为拓扑空间，$x\in X$，Y为X的子集，证明当$Y-\{x\}$中有点列收敛于x时，x为Y的聚点。

10. X为A_1空间，则对于$x\in X$，存在x的一个可数局部基$\{U_n\}$，满足$U_{n+1}\subset U_n(n=1,2,\cdots)$。

11. $X=\{a,b\}$，$\tau_1=\{\varnothing,X\}$，$\tau_2=\{\varnothing,\{a\},X\}$，$\tau_3=\{\varnothing,\{b\},X\}$，$\tau_4=\{\varnothing,\{a\},\{b\},X\}$，记$X_i=(X,\tau_i)(i=1,2,3,4)$。举出满足或不满足下列诸分离性公理的空间$X_i$：(1)不满足$T_0$；(2)满足$T_0$但不满足$T_1$；(3)满足$T_2$；(4)满足正规；(5)满足正则；(6)不满足$T_3$；(7)满足正规但不满足$T_4$；(8)满足正规但不满足正则。

12. X为T_1空间，x为子集A的聚点的充分必要条件是x的每个邻域有A的无限多个点。

13. 证明(X,τ_1)为T_2空间$\Leftrightarrow$对任何$p,q\in X$，且$p\neq q$，存在$U(p)\in\tau$使$q\notin\overline{U(q)}\Leftrightarrow$对任何$p\in X$，$\bigcap\overline{U(p)}=\bigcap\{\overline{U}\mid U$是点$p$的邻域$\}=\{p\}$。

14. 设F_1,F_2是度量空间(X,ρ)的任意两个不相交的闭集，利用$U(F_1)=\{x\in X\mid\rho(x,F_1)<\rho(x,F_2)\}$ $U(F_2)=\{x\in X\mid\rho(x,F_1)>\rho(x,F_2)\}$，证明$(X,\rho)$为正规空间。

15. 证明度量空间是T_2空间。

16. 证明X为正规空间的充分必要条件是，对X的任意一闭集F的每一邻域$U(F)$，必存在的邻域$V(F)$，使得$\overline{V(F)}\subset U(F)$。

§6 连通性

微积分的介值定理依赖于闭区间$[a,b]$,推广到拓扑空间,建立介值定理的拓扑性质被称为连通性。直观上,如果图形不能分割成互不粘连的部分被称为连通的,例如 $R^1=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)$为一整体,而 $R^1-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$不能构成整体。

定义 1 (X,τ)为拓扑空间,如果 $X=A\cup B$, $A,B\in\tau$, $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, $A\cap B=\emptyset$,则称 X 为非连通的拓扑空间。

如果 X 不是非连通的,就称它为连通的拓扑空间。

例 1 $X=\{a,b,c,d,e\}$, $\tau=\{\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$, X 是非连通的,而 $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},X\}$, X 连通。

注 定义 1 中的"开集 A,B"改为"闭集 A,B"或"既开又闭的集合 A,B",则容易看出这三种定义是等价的,而拓扑空间 X 连通$\Leftrightarrow X$ 的子集中只有 X 和 $\emptyset$ 是既开又闭的,换言之,X 非连通$\Leftrightarrow X$ 中存在既开又闭的非空真子集(以上均留作习题)。

例 2 R^1 的有理数子空间 Q 非连通。设 r 为任一无理数,则 $(-\infty,r)\cap Q(=(-\infty,r]\cap Q)$为 Q 的既开又闭的非空真子集,Q 非连通。

例 3 平庸拓扑空间是连通的,不少于两点的离散空间是非连通的。

例 4 实数下限拓扑空间 $X=R$, $\tau=\{G\mid$ 任何 $x\in G$,存在 $a>x$,使$[x,a)\subset G\subset X\}$是非连通的,事实上:

$$X=\{x\mid -\infty<x<0\}\cup\{x\mid 0\leqslant x<+\infty\}$$
$$=(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,0))\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,n))$$

即 X 为两个不相交的非空开集的并集。但 R^1 是连通的(因为只

有 R^1 和 $\varnothing$ 是既开又闭的），两者区别很大。

设 $Y \subset X$，如果子空面(Y, τ_Y)是非连通的或连通的拓扑空间，则称 Y 为非连通或连通的子集。

定理 1 (X, τ)是拓扑空间，且 $X = A \cup B$，$A, B \in {}_a\tau$，$A \cap B = \varnothing$。如果 Y 是 X 的连通子集，则 $Y \subset A$ 或 $Y \subset B$。

证明 $Y = (A \cup B) \cap Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$，$A \cap Y \in \tau_Y$，$B \cap Y \in \tau_Y$，$\varnothing = (A \cap B) \cap Y = (A \cap Y) \cap (B \cap Y)$，必有 $A \cap Y = \varnothing$ 或 $B \cap Y = \varnothing$。事实上，若 $A \cap Y \neq \varnothing$ 且 $B \cap Y \neq \varnothing$。则 Y 非连通，矛盾。

定理 2 (X, τ)为拓扑空间，Y 是 X 的连通子集，且 $Y \subset Y_1 \subset \overline{Y}$，则子空间 Y_1 也是连通的，特别地，Y 连通则 $\overline{Y}$ 也连通。

证明 反证法。若 Y_1 非连通，$Y_1 = A \cup B$，且 $A \cap B = \varnothing$，这里 A, B 是 Y_1 的非空开集。因为 Y 连通，由定理 1，$A \cap Y = \varnothing$ 或 $B \cap Y = \varnothing$。不妨设 $B \cap Y = \varnothing$，$Y \subset A$，B 为 Y_1 中的开集，A 为 Y_1 中的闭集，于是，Y 在 Y_1 中的闭包 $\overline{Y}_{Y_1} \subset \overline{A} = A$。由已知 $\overline{Y}_{Y_1} = \overline{Y} \cap Y_1 = Y_1$，于是 $Y_1 \subset A$，$B = \varnothing$，矛盾。

定理 3 若 $Y, Y_a (a \in \mu)$都是拓扑空间 X 的连通子集，如果对任何 $a \in \mu$，$Y_a \cap Y \neq \varnothing$，则 $Y \cup (\bigcup_a Y_a)$是 X 的连通子集。

证　明 反证法。若 $Y \cup (\bigcup_a Y_a)$非连通，则 $Y \cup (\bigcup_a Y_a) = A \cup B$，$A$ 和 B 是 $Y \cup (\bigcup_a Y_a)$的两个非空开集，且 $A \cap B = \varnothing$。由定理 1，连通子集 $Y \subset A$（或 B）。不访设 $Y \subset A$，因为 $Y \cap Y_a \neq \varnothing$，所以 $Y_a \subset A (a \in \mu)$，于是 $Y \cup (\bigcup_a Y_a) \subset A$。但 $A \subset Y \cup (\bigcup_a Y_a)$，有 $Y \cup (\bigcup_a Y_a) = A$，$B = \varnothing$，矛盾。

例 5 R^n 是连通的。设 $Y = \{O = (0, \cdots, 0)\} \in R^n$，$Y$ 连通。对任何 $a \in R^n a \overline{\in} Y$，作过 O 和 a 的直线 $Y_a = \{ta \mid t \in R\}$，$Y_a$ 连通$(a \in R^n)$，由定理 3，$R^n = Y \cup (\bigcup_a Y_a)$也是连通的。

定理 4　设 X,Y 为拓扑空间，$f: X \to Y$ 是连续映射。如果 X 连通，则 $f(X)$ 也是连通的。

证明　反证法。若 $f(X)$ 非连通，则 $f(X)=A\cup B$，A,B 是 $f(X)$ 的非空不相交的开子集，f 连续。$f^{-1}(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 也是 X 的开子集，且 $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=\emptyset$，$X$ 非连通，矛盾。

由定理 4 知连通性是拓扑性质。定理 2、定理 3 和定理 4 都是构造新的连通空间的方法。

例 6　由定理 4 知 R^1 中的任何区间都是连通的(证明留作习题)；反之亦成立，即 $E\subset R^1$ 连通(E 不少于两点)，则 E 必是区间，所谓区间，即若 $a,b\in E$，则 $[a,b]\subset E$。反证法。若 E 不是区间，即当 $a,b\in E$，$[a,b]$ 不包含于 E，也就是有 $c\in[a,b]$，但 $c\overline{\in} E$。令 $A=(-\infty,C)\cap E$，$B=(C,+\infty)\cap E$，则 A,B 为非空开集，$A\cup B=E$，$A\cap B=\emptyset$，即 E 非连通，矛盾。

例 7　拓扑空间 X 非连通 $\Leftrightarrow$ 存在一个连续映射 $f: X\to R^1$，使得 $f(X)$ 恰是 R 上两个不同的值。

证明　X 非连通，$X=A\cup B$，A,B 为开集，且 $A\cap B=\emptyset$，令

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in A\\ 1 & x\in B\end{cases}$$

则 f 是由 X 到离散空间 $Y=\{0,1\}$ 上的连续函数。

另一方面则考虑逆否命题。由定理 4 连通空间 X 的连续象不可能是非连通的离散空间 $Y=\{0,1\}$ 即知。

例 8　(介值定理)X 为连通空间，$f: X\to R^1$ 是连续映射，对于 $x_1,x_2\in X$ 和 $f(x_1)\leqslant C\leqslant f(x_2)$，必存在一点 $\xi\in x$，使 $f(\xi)=c$。

证明　$f(x)$ 为 R^1 的连通子集(定理 4)，应为 R^1 的区间，由已知，$[f(x_1),f(x_1)]\subset f(X)$，所以 $c\in f(X)$，故存在 $\xi\in X$，使 $f(\xi)=c$。本例将微积分中的介值定理推广到了连通空间。

例 9　记 $x=(x_1,x_2)\in S^1$，对径点 $-x=(-x_1,-x_2)\in S^1$，显

然 $-(-x)=x$，且对径映射是连续的，因为它将开圆弧反射为开圆弧，若 $f: S^1 \to R^1$ 是连续映射，必存在一点 $x \in S^1$，使得 $f(x)=f(-x)$，即 Borsuk - Ulam 定理。事实上，令 $F: S^1 \to R^1$，$F(x)=f(x)-f(-x)$，则 F 连续。若有 $a \in S^1$，使得 $f(a) \neq f(-a)$，则 $F(a)$ 与 $F(-a)$ 异号，由例 8，有 $x \in S^1$，使 $F(x)=0$，即 $f(x)=f(-x)$。一般地，$f: S^n \to R^n$ 连续，则必存在一点 $x \in S^n$，使得 $f(x)=f(-x)$。例如，设 f_1, f_2 为连续函数 $f: S^2 \to R^2$ 的两个坐标函数，视一个为温度，一个为气压，则地球表面上有对径点，使之相等。

例 10 设 $I=[0,1]$，$f: I \to I$ 是连续映射，则有 $x \in I$，使 $f(x^*)=x^*$（x^* 称为 f 的不动点）。

证明 若 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，0 或 1 为 f 的不动点。下设 $f(0)>0, f(1)<1$ 令 $F:[0,1] \to R^1$，$F(x)=x-f(x)$，$x \in I$，则 F 连续且 $F(0)<0$，$F(1)>0$，由介值定理，存在 $x^* \in I$，使得 $F(x^*)=0$，即 $f(x^*)=x^*$，x^* 为不动点。一般地，$f: I^n \to I^n$ 连续，f 有不动点（Brouwer 定理）。在数学各分支中，不动点定理可用于解决各类存在性问题，例如微分方程解的存在性；Birkhoff 把不动点定理推广到无穷维函数空间。不动点性质是拓扑性质，事实上，设 X 具有不动点性质，$h: X \to Y$ 同胚。对任意的连续映射 $f: Y \to Y$，作 $\tilde{f}=h^{-1} \circ f \circ h: X \to X$，设 $\tilde{f}$ 有不动点：$\tilde{f}(x^*)=x^*$，此时，$y^*=h(x^*)$ 满足 $f(y^*)=f \circ h(x^*)=h \circ \tilde{f}(x^*)=h(x^*)=y^*$，即与 x^* 对映的 y^* 是 Y 的不动点，因此，Y 也具有不动点性质。

易知圆周 S^1 不具有不动点性质（如对径映射），由此可知 S^1 与 I 不同胚。证明两个拓扑空间同胚往往较困难，于是退一步，利用拓扑性质来说明不同胚，即某种拓扑性质为一个空间所具有，而另一个空间不具有，则它们不同胚。区分两个不同胚的拓扑空间 X、Y 常用的方法之一是：假定 $h: X \to Y$ 同胚，则在 X 中移去一个

子集 A 之后，$X-A$ 与 $Y-h(A)$ 仍然同胚，因此它们应该有相同的拓扑性质。否则，它们不同胚。

例如，直线和圆周不同胚，它们各自去掉一点后，直线不连通，但圆周却连通。同样可证明 S^1 与 S^2，R^1 与 $R^m(m\geqslant 2)$ 均不同胚。注意，R^n 与 R^m 不同胚则需代数拓扑知识。

由上述可知，连通可由聚点实现。下面介绍条件更强的，即由一段“曲线”来实现的道路连通。

定义 2 X 为拓扑空间，$p,q\in X$，$I=[0,1,]$，如果连续映射 $f:I\to X$ 使得 $f(0)=p$，$f(1)=q$，称 f 为 X 中连接点 p,q 的一条道路。

如果对于 X 中任意两点，在 X 中都有一条连接它们的道路，就称 X 为道路连通的。

道路是代数拓扑学中的一个重要的基本概念，是建立基本群的基础。

例 11 实数空间 R^1 是道路连通的。因为对任意的 $x,y\in R^1$，定义道路 $f:f(t)=(1-t)x+ty$，$t\in[0,1]$，f 为连结 x,y 的道路。设子集 $A\subset R^n$，如果任给 $p,q\in A$，必有“直线”段 $(1-t)p+tq\subset A(0\leqslant t\leqslant 1)$ 则称 A 为的凸集。凸集 A（如 R^n，R^n 中的 K 维向量子空间，R^n 中的开（闭）长方体和球、R^1 中各种区间）显然是道路连通的。

定理 5 若 X 为道路连通空间，则 X 必为连通空间。

证明 对于任意 $p,q\in X$，由于 X 道路连通，有道路 $f:[0,1]\to X$，使得 $f(0)=p$，$f(1)=q$，从而 $p,q\in f([0,1])$，由于 $[0,1]$ 是连通的，由定理 4，$y_{pq}=f([0,1])$ 是 X 的连通子集，任取 $x_0\in X$，则 $X=\bigcup\limits_{p\in X}y_{px_0}$ 且 $x_0\in\bigcap\limits_{p\in X}y_{px_1}$，所以 $\bigcap\limits_{p\in X}y_{px_0}\neq\varnothing$。由定理 3，$X$ 连通。

这一定理的逆命题不成立，请参看下例。

例 12 设 $A=\{(x,y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x},0<x\leqslant\dfrac{2}{\pi}\}$，$A$ 为 $[0,\dfrac{2}{\pi}]$ 的

连续象,A 连通。由定理 2,$\overline{A}$ 连通。若令 $B=\{(0,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$,则 $\overline{A}=A\cup B$,$\overline{A}$ 称为拓扑正弦曲线。容易证明,对于 A 中的点和 B 中的点,没有道路连结此两点,即 $\overline{A}$ 不是道路连通的。本例还说明,A 是道路连通,$\overline{A}$ 却非道路连通。

X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$ 连续,显然,如果 X 是道路连通的,则 $f(X)$ 也是道路连通的(证明留作习题)。由此易知,S^n 是道路连通的。事实上,任取 S^n 上两点 x_0 和 x_1,再取 y 不同于 x_0 和 x_1,由 $S^n-\{y\}\cong R^n$ 是道路连通的。从而存在 $S^n-\{y\}$ 上的道路 f,使得 $f(0)=x_0$,$f(1)=x_1$,f 即是 S^n 上连结 x_0 和 x_1 的道路,S^n 道路连通。显然,S^n 连通。

对于非连通空间,有必要引入连通分支的概念。一个非连通的空间可以唯一地分解为不同的连通分支,连通分支的数目给出了判断拓扑空间不连通的粗糙方法。

定义 3　X 为拓扑空间,$x\in X$,x 在 X 中的连通分支 C_x 是指包含点 x 的所有连通子集的并。

由定理 3,C_x 是连通的,并且有

定理 6　(1^0)每个 C_x 是 X 中一个最大的连通子集,即 C_x 不是 X 的另一连通子集的真子集。

(2^0)X 中所有连通分支是 X 的一个分类。

(3^0)连通分支均为闭集。

证明　(1^0)如果 D 是 X 中包含 C_x 的连通子集,$D\supset C_x$,但由定义 3,$C_x\supset D$,$\therefore D=C_x$。

(2^0)如果 C_{x_1} 与 C_{x_2} 相交,必有 $C_{x_1}=C_{x_2}$。事实上,由定理 3,$C=C_{x_1}\cup C_{x_2}$ 连通,从 C_{x_1} 和 C_{x_2} 的最大性,知 $C_{x_1}=C_{x_2}=C$。这说明 X 的任何两个连通分支或者重合,或者不相交,即 X 中所有连通分支是 X 的一个分类。

(3^0)X 的每一连通分支 C_x 连通,由定理 2,$\overline{C_x}$ 连通。由 C_x 的

最大性知 $C_x \supset \overline{C_x}$ 又，$\overline{C_x} \supset C_x$，所以 $C_x = \overline{C_x}$ 为闭集。

定理 7 X, Y 为拓扑空间，$f: X \to Y$ 连续，则 X 的每一连通分支的像必位于 Y 的一个连通分支中。若 $h: X \cong Y$，则 h 导出 X 的连通分支和 Y 的连通分支的 1—1 对应，并且这个对应是同胚的。

证明 $f: X \to Y$ 连续，$\forall x \in X$，设 $y = f(x)$，则 $f(C_x)$ 连通，且由 C_y 的最大性知 $f(C_x) \subset C_y$。若 $h: X \cong Y$，$\forall x \in X$，设 $y = h(x)$，则 $h(C_x) \subset C_y$，且 $h^{-1}(C_y) \subset C_x$，即 $C_y \subset h(C_x)$，因此，$h(C_x) = C_y$。显然，同胚映射 h 限制在 C_x 上仍为同胚映射。

例 13 集合 $X = \{a, b\}$，X 上的拓扑 $\tau_1 = \{\varnothing, X\}$，$\tau_2 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$，$\tau_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$，则 (X, τ_1)，(X, τ_2) 的连通分支均为 X，而 (X, τ_3) 的连通分支为 $\{a\}$，$\{b\}$，其连通分支数目为 2，且均为闭集。

例 14 视有理数集 Q 为 R^1 的子空间，每一有理数 $r \in Q$ 的连通分支即为点 r 自身。事实上，若 C_r 另有一点 r'，不妨设 $r' > r$，任取 α，满足 $r < \alpha < r'$，$C_r = (\{x \mid x > \alpha\} \cap Q \cap C_r) \cup (\{x \mid x < \alpha\} \cap Q \cap C_r)$，则 C_r 非连通，矛盾。类似地，R' 的无理数组成的子空间和离散空间的连通分支均为单点集。一般地，拓扑空间的每一连通分支都由单点集构成时，称为完全不连通空间。

类似地，可定义道路连通分支。

定义 4 X 为拓扑空间，C 是 X 的道路连通子集。如果 C 不是 X 的另一道路连通子集的真子集（C 为最大性），则称 C 是 X 的道路连通分支。

显然，拓扑空间 X 的每一非空道路连通子集必落在一个道路连通分支中，X 划分为若干个两两不相交的道路连通分支。

例 15 道路连通分支不一定是闭集。例 12 中的拓扑正弦曲线 $X = A \cup B$，X 的道路连通分支有两个，即 A 和 B，其中 A 是 X 的开子集而非闭集，而 B 是 X 的闭子集而非开集。一般来说，道路连通分支必包含于连通分支中，本例则说明反之不一定成立。

下面的定理回答道路连通与连通何时等价。

定理 8 拓扑空间 X 道路连通$\Leftrightarrow X$ 连通，且 $\forall x \in X$，有一个道路连通邻域。

证明 仅证充分性。若 X 连通，X 中每一点 x 都有一个道路连通邻域 U。设 C 是含 x 的道路连通分支，由已知，$x \in U \subset C$，即 C 为开集。而 $\sim C$ 是除 C 以外的道路连通分支的并集，所以 C 又是闭集。X 连通，X 仅有非空既开又闭的子集 X 自身，所以 $X = C$，这说明 X 是道路连通的。

由定理 8 易知，R^n 中的开集 G 若是连通的，则必是道路连通的，这只要注意到开球 $B(x, \varepsilon)$ 是道路连通的即可，G 称为 R^n 中的开区域，而 $\overline{G}$ 称为闭区域。特别地，有复变函数中的重要定理：R^2 的开连通集是道路连通的。

习　题

1. 证明定义 1 下面的注。

2. $X = \{a, b, c, d, e\}$，$\tau = \{\varnothing, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, X\}$，子空间 $A = \{a, d, e\}$，证明 X 连通，但 X 的子空间 A 却非连通。

3. 证明 S^n 是道路连通的。

4. 利用“连通性是拓扑性质”证明

(1^0) R^1 上任一区间与 S^1 不同胚。

(2^0) R^1 上的闭区间、开区间、半开半闭区间彼此不同胚。

(3^0) R^1 与 R^2 不同胚。

(4^0) S^1 与 S^2 不同胚。

5. 证明

(1^0) X_0 是 X 的既开又闭的子集，A 是 X 的连通子集，则或者 $A \cap X_0 = \varnothing$，或者 $A \subset X_0$。

(2^0)如果 X 有一个连通覆盖 η（即 η 中每个成员都是连通

的)，并且 X 有一连通子集 A，它与 η 中每个成员都相交，则 X 通连。

(3^0)利用(2^0)证明 R^2 连通。

(4^0) X 是 R^2 的子集，$X=\{(x,y)\mid x,y$ 不全为无理数$\}$，证明 X 连通。

6. 设 X_1,X_2 都是连通空间 X 的开(闭)子集，$X_1\cup X_2=X$，$X_0=X_1\cap X_2$非空，且 X_0 连通，证明 X_1,X_2 都连通。

7. 设 X 为拓扑空间，$x,y\in X$，如果 X 中存在一条连结 x,y 的道路，则称 $x\sim y$。证明"$\sim$"是等价关系。

8. 设 X 为拓扑空间，$f:I\to X$ 和 $g:I\to X$ 是有相同起终点 p,q 的两条道路，如果连续函数 $H:I\times I\to X$ 使得 $H(s,0)=f(s)$，$H(0,t)=p$ 和 $H(s,1)=g(s)$，$H(1,t)=q$，则称 f 定端同伦于 g，记为 $f\underset{\cdot}{\simeq}g$。证明，在有相同起终点的所有道路集合中，同伦关系是等价关系。

9. X,Y 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 连续，如果 X 是道路连通的，则 $f(X)$也是道路连通的。

10. $X=\{a,b,c,d,e\}$，$\tau=\{\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$，求$(X,\tau)$的连通分支。

§7 紧致性

紧致性在分析学中早就出现并有许多应用，然而从本质上讲，它属于拓扑学范畴的概念。紧致性描述了拓扑空间的某种有限性，可以把对无限情形的考虑归结为对有限情形的考虑，这是一种最基本最常见的拓扑性质。

定义 1 设(X,τ)为拓扑空间，如果对于 X 的每一开覆盖 η 必有一个有限的(开)子覆盖 η'，则称(X,τ)(或拓扑空间 X)为紧致的。

若 A 为 X 的非空子集,如果 A 作为 X 的子空间是紧致的,则称 A 为 X 的紧致子集。

例 1 由 Hiene—Borel 定理可知,R^1 中任何有界闭区间$[a,b]$都是紧致的,但开区间 $A=(0,1)$不是紧致的,令 $\eta=\{(\frac{1}{3},1),(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),(\frac{1}{5},\frac{1}{3}),\cdots\}$ $A=\bigcup_n G_n$, $G_n=(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})$, η 不存在有限子覆盖。(反证)设 $\eta'=\{(a_1,b_1),\cdots,(a_m,b_m)\}$为 η 的任一有限子组,$\varepsilon=\min(a_1,\cdots,a_m)$,则$(a_1,b_1)\cup\cdots\cup(a_m,b_m)\subset(\varepsilon,1)$,但$(0,\varepsilon]$与$(\varepsilon,1)$互斥,$\eta'$不是 A 的覆盖,A 不是紧致的。

由定义 1 A 为拓扑空间 X 的紧致子集即每一由 A 中的开集构成的开覆盖都有有限子覆盖,这等价于每一由 X 的开集构成的 A 的开覆盖都有有限子覆盖。事实上若 A 为 X 的紧致子集,η 为 A 的由 X 的开集构成的覆盖,则 $\eta'=\{A\cap G\mid G\in\eta\}$为 A 的覆盖。A 紧致,η'有有限子覆盖,设为$\{A\cap G_1,A\cap G_2,\cdots,A\cap G_n\}$。于是 η 的子族$\{G_1,G_2,\cdots G_n\}$覆盖 A($G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n\supset(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)\cup\cdots\cup(A\cap G_n)=A\cap(G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n)=A$)。反之,设 η 为 A 的开集构成的开覆盖,对 η 的每一成员 G,存在 X 的开集 U_G,使得 $U_G\cap A=G$。$\eta'=\{U_G\mid G\in\eta\}$为 A 的由 X 的开集构成的开覆盖,从而有有限子覆盖,设为$\{U_{G_1},U_{G_2},\cdots,U_{G_n}\}$。仿上,相应的 η 的子族$\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$为 A 中开集构成的有限子覆盖。

紧致性对闭子集遗传,即有

定理 1 紧致拓扑空间(X,τ)的任一闭子集 Y 是紧致的。

证明 当 Y 为 X 的闭子集时,对任一 X 的开集构成的 Y 的开覆盖 η,$\eta'=\eta\cup(\sim Y)$,为 X 的开覆盖。X 紧致,η'有有限子覆盖,从而 η 有有限子覆盖。由上证,Y 紧致。

另证 设 $\eta_Y=\{G_a\cap Y\mid G_a\in\tau\}$是 Y 的任一开覆盖,因为 Y 是 X 的闭子集,$X-Y$ 是开集,所以 $\eta=\{G_a,X-Y\}$是 X 的一个开覆盖。由于 X 紧致,必有一个有限的子覆盖 $\eta'=\{G_1,\cdots,G_k\}$。

于是 $\eta'_Y=\{G_i\cap Y \mid G_i\in\eta'\}$ 是 η' 的有限子覆盖。这就证明 Y 也是紧致的。

设 σ 为闭集族，σ_1 是 σ 的任一有限子族，且 $\bigcap\limits_{F\in\sigma_1}F\neq\varnothing$，称闭集族 σ_1 具有有限交性质。以下定理借助开集和闭集的“对偶关系”从闭集族的角度刻化紧致性。

定理 2 拓扑空间 X 是紧致空间当且仅当 X 的每一具有有限交性质的闭集族 σ_1 有非空交：

$$\bigcap_{F\in\sigma_1}F\neq\varnothing。$$

证明留作习题。

定理 3 设 (X,τ) 为 T_2 空间，则 X 的每一紧致子集都是闭集。

证明 设 A 为 T_2 空间 X 的紧致子集，下证 $X—A$ 为开集，即对任何 $p\in X-A$，存在 p 点的邻域 $U(p)\subset X-A$。事实上，因为 X 是 T_2 空间，所以对任何 $x\in A$，存在 p 的与 x 有关的邻域 $U(p,x)$ 和 x 的邻域 $V(x)$，使得 $U(p,x)\cap V(x)=\varnothing$。显然，$\{V(x)\mid x\in A\}$ 是 A 的 X 中的一个开复盖，由 A 紧致，它有一个有限的子覆盖 $\{V(x_k)\mid K=1,2,\cdots,n\}$，令

$$U(p)=\bigcap_{k=1}^{n}U(p,x_k)$$

易见 $U(p)$ 是 p 的邻域，且 $U(p)\cap V(x_k)=\varnothing$，所以

$$\begin{aligned}U(p)\cap A&\subset U(p)\cap\Big[\bigcup_{k=1}^{n}V(x_k)\Big]\\&=\bigcup_{k=1}^{n}(U(p)\cap V(x_k))=\varnothing\end{aligned}$$

于是 $p\in U(p)\subset X-A$，即 $X—A$ 是开集，A 是 X 的闭集。

推论 紧致的 T_2 空间中的子集为闭集当且仅当它为紧致子集。

定理 1、定理 3 和推论的结果，可列为下表：

紧致空间：　　闭集$\Leftrightarrow$紧致子集

T_2空间：　　闭集$\Leftarrow$紧致子集

紧致的T_2空间：　　闭集$\Leftrightarrow$紧致子集

下面将分离性与紧致性放在一道作深入的考察。

定理 4　设X为T_2空间，若A为X的紧致子集，$x \overline{\in} A$，则x和A分别有开邻域U和V，使得$U \cap V = \emptyset$（T_2空间中紧致子集A与不属于A的点x可分离）。

证明　对任一$y \in A, y \neq x$。X为T_2空间，存在y的开邻域V_y与x的开邻域U_y使得$U_y \cap V_y = \emptyset$，A是紧致子集，对A的开覆盖$\{V_y, y \in A\}$有有限子覆盖，设为$\{V_{y_1}, V_{y_2}, \cdots V_{y_n}\}$，令$V = V_{y_1} \cup V_{y_2}, \cdots, \cup V_{y_n}$，$U = U_{y_2} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap \cup_{y_n}$，则$V$，$U$分别是$A$，$x$的开邻域，且$U \cap V_{y_1} = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n} \cap V_{y_i} = \emptyset (i = 1, 2, \cdots, n)$因此$U \cap V = (U \cap V_{y_1}) \cup (U \cap V_{y_2}) \cup \cdots \cup (U \cap V_{y_n}) = \emptyset$。

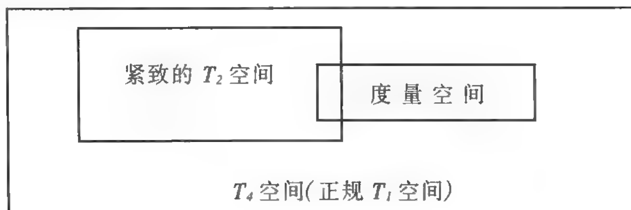
推论　设X为T_2空间，若A与B为X的不相交的紧致子集，则A，B分别有开邻域U和V，使得$U \cap V = \emptyset$（T_2空间中，不相交的紧致子集A与B可分离）。

证明留作习题。

定理 5　每一紧致的T_2空间都是正规空间。

证明　设X为紧致的T_2空间，若A，B为X的不相交的闭集，由上表，A，B是X的不相交的紧致子集，且分别有开邻域U和V，使得$U \cap V = \emptyset$，故X为正规空间。

于是度量空间和紧致的T_2空间都包含在T_4空间类中，如下面方框图所示：



以下讨论紧致空间的连续映射。

定理 6 设(X,τ_1)为紧致拓扑空间，(Y,τ_2)为拓扑空间，$f:X\to Y$是连续映射，则$f(X)$是Y的紧致子集。

证明 $f(X)$视作(Y,τ_2)的子空间，$f:X\to f(X)$连续。设$\eta=\{V_a\}$是$f(X)$的任一开覆盖，$f^{-1}(V_a)$是X的开集，且$\{f^{-1}(V_a)\}$是X的一个开覆盖。X紧致，$\{f^{-1}(V_a)\}$有有限子覆盖：$\{f^{-1}(V_{a_1}),f^{-1}(V_{a_2}),\cdots,\{f^{-1}(V_{a_n})\}$，$f:X\to f(X)$为满射，$ff^{-1}(V_a)=V_a$。所以$\{V_{a_1},V_{a_2},\cdots V_{a_n}\}$是$f(X)$的有限开覆盖，它是$\eta$的有限子覆盖，即$f(X)$是$Y$的紧致子集。

由定理 6 知，紧致性是连续映射下的不变性质，当然也是拓扑不变性质。由于R^1不是紧致空间，可知任一开区间都不是紧致空间。

定理 7 从紧致空间到T_2空间的连续映射必为闭映射。

证　明 设X为紧致空间，Y为T_2空间，$f:X\to Y$为连续映射。若A为X的任一闭集，则A为紧致子集(定理 1)，从而$f(A)$为Y的紧致子集(定理 6)，且为闭集(定理 3)，这证明f为闭映射。

下面的定理说明紧致空间的特殊性，它在现代几何学中起着非常重要的作用，主要用来构造同胚。

定理 8 从紧致空间到T_2空间的一一映上的连续映射是同胚。

证明 据定理 7 以及一一映上的连续映射是同胚。

例 2 设f为闭区间$I=[0,1]$到R^n的一一连续映射，I紧致，R^n为T_2空间，由定理 8，I与$f(I)\subset R^n$是同胚的。

定理 8 在更一般的情况下是不成立的。

例 3 $f:[0,1)\to S^1$，$f(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$。显然$f$为一一映上的连续映射，但区间$[0,1)$并不同胚$S^1$。定理 8 在本例中不适用的原因是区间$[0,1)$不紧致。

这里介绍与紧致性有关的概念，先考虑较直观的“点分布很

紧”的情形。

定义 2 设 X 为拓扑空间，如果 X 的每一无限子集都有聚点，则称 X 为列紧空间。拓扑空间 X 的一个子集 Y 称列紧的，如果 Y 作为 X 的子拓扑空间是列紧的，即 Y 的每一无限子集都有一聚点属于 Y。

定理 9 每一紧致空间都是列紧空间。

证明 (反证)若 X 不列紧，即存在 X 的无限子集 A，使 $A^d = \varnothing$，于是 $\overline{A} = A \cup A^d = A$ 是闭集，$X - A$ 是开集。由于任何 $a \in A$，$a \overline{\in} A^d = \varnothing$，故存在 a 的邻域 $U(a)$，使得 $U(a) \cap (A - \{a\}) = \varnothing$，于是 $(X - A) \cup \{U(a) \mid a \in A\}$ 是 X 的一个开覆盖，它显然无有限子覆盖，矛盾。

列紧空间可以不是紧致空间，见下例。

例 4 设集合 $X = \{n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$，$\tau_* = \{\{2n - 1, 2n\} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$，易知 τ_* 是 X 的一个拓扑基，由 τ_* 诱导出拓扑空间 (X, τ)，X 是列紧的。事实上对每个 n，$2n$ 是独点集 $A = \{2n - 1\}$ 的聚点，例如 2 的任一邻域 U，$U \cap (A - \{2\}) \neq \varnothing$，2 是 $A = \{1\}$ 的聚点。类似地，$2n - 1$ 是独点集 $\{2n\}$ 的聚点。因而 X 的每个非空子集至少有一聚点。显然 X 不是紧致的，因为 τ_* 是 X 的一个开覆盖，但它不包含有限的子覆盖。

定义 3 X 为拓扑空间，如果 X 的每一可数开覆盖都有有限子覆盖，则称 X 为可数紧致空间。

显然，每一紧致空间都是可数紧致空间。

定义 4 X 为拓扑空间，如果 X 的每一开覆盖都有可数子覆盖，则称 X 为 Lindelöf 空间。

显然，每一 Lindelöf 的可数紧致空间都是紧致空间。

定理 10 每一可数紧致空间都是列紧空间。

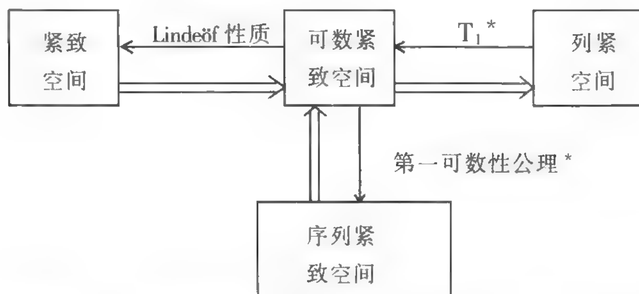
证明 (反证)设 X 为可数紧致空间，但不列紧，即 X 存在一个无聚点的无限子集。在其中取一个无限可数子集 $A = \{x_n \mid n =$

$l, 2, 3, \cdots\}$，因 A 无聚点，故 A 是闭集，$X-A$ 是开集，对任意的 $x_n \in A$，存在 x_n 的邻域 U_n，使得 $U_n \cap (A-\{x_n\}) = \varnothing$，即 U_n 恰含 A 中一点 x_n，从而 $\{X-A, U_n \mid n=1,2,3,\cdots\}$ 是 X 的无限可数开覆盖，显然，它没有有限子覆盖，矛盾。

定义 5　X 为拓扑空间，如果 X 中每一序列都有收敛的子序列，则称 X 为序列紧致空间。

定理 11　每一序列紧致空间都是可数紧致空间（证明略）。

紧致、列紧、可数紧致和序列紧致的关系如下表，打 * 号的证明略。



由此表看出，可数紧致空间是讨论的中间站。就人们认识过程来说，是先研究度量空间后研究拓扑空间，在度量空间中，以上几种紧致性是等价的。随着认识的深化，人们才逐步对紧致性的本质有所了解。

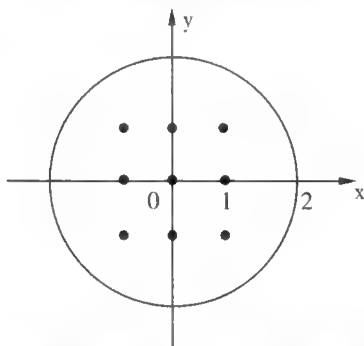
例 5　余集拓扑空间 X 是四种紧性均不具备的例子，取 A 是 X 的可数子集，A 无聚点，X 不列紧。取 A 是 X 的不可数子集，对任一 $x \in X-A$，$A-\{x\}$ 中没有任何序列收敛于 x，X 不是序列紧致。X 也不是可数紧致，事实上，令 $C_n = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots\}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\eta = \{X-C_n\}$ 为开集族，且 $\bigcup_n (X-C_n) = X - \bigcap_n C_n = X$，即 η 为 X 的开覆盖。显然，η 不存在有限子覆盖。因此，X 不是

可数紧致，从而也不是紧致。

为了讨论度量空间的紧致性，先介绍两个有关度量的概念。

定义 6 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是度量空间 X 的有限子集，如果 $X\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(a_k,\varepsilon)$（即对任何 $x\in X$，$d(x,A)<\varepsilon$），则称 A 是 X 的一个 ε－网（$\varepsilon>0$）。如果对任意的 $\varepsilon>0$，X 均存在 ε－网，则称 X 为完全有界的。

例 6 X 为 R^2 中半径为 2 的开圆盘，$A=\{a_1,a_2,\cdots a_9\}$，则 A 是 X 的 $\frac{3}{2}$－网，但 A 不是 X 的 $\frac{1}{2}$－网。



定理 12 列紧度量空间 X 是完全有界的（证明留作习题）。

定义 7 X 为度量空间，$\eta=\{G_\alpha\}$ 为 X 的一个开覆盖，若正数 $\lambda=\lambda(\eta)$ 具有性质：对 X 的任一子集 A，当 A 的直径 $d(A)<\lambda$ 时，至少有一个 $G_\alpha\in\eta$，使得 $A\subset G_\alpha$，称 λ 为覆盖 η 的 Lebesgue 数。

例 7 区间 $I=[0,1]$，$\eta=\{U_i\}$ 是 I 的一个开覆盖，$\lambda=\lambda(\eta)$ 为 η 的 Lebesgue 数。取正整数 $m>\frac{1}{\lambda}$（$\frac{1}{m}<\lambda$），等分 I 为 m 段，则每小段包含在某个 U_i 中，$U_i\in\eta$。

Lebesgue 数不一定存在。考虑实数空间 R^1 的覆盖 $\eta=\{(n-\frac{1}{|n|},n+1+\frac{1}{|n|})\mid n\in Z\ ,n\neq0\}$，则任一实数 $\lambda>0$ 都不是 η 的

Lebesgue 数，即任意给定 $\lambda>0$，存在 R^1 的某一子集 A，$d(A)<\lambda$，但 η 中的任一成员都不包含 A（读者自证）。

定理 13 X 为列紧度量空间，X 的任一开覆盖 η 具有 Lebesgue 数 $\lambda=\lambda(\eta)$

证明 （反证）假设开覆盖 η 的 Lebesgue 数 λ 不存在，任取自然数 n，存在 $A_n\subset X$，$d(A_n)<\dfrac{1}{n}$，对任何 $G_a\in\eta$，有 $A_n\not\subset G_a$。任取 $a_n\in A_n(n=1,2,\cdots)$，因为 X 列紧，点列 $\{a_n\}$ 有一子点列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 $a\in X$，事实上，不妨设 $\{a_n\}$ 无完全相同的点，X 的无限子集 $\{a_n\}$ 有一聚点 a，由于度量空间 X 列紧 $\Leftrightarrow X$ 中每个点列必有收敛的子点列（证明留给读者），$\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a，$a\in X$。由于 η 为 X 的开覆盖，存在 $G\in\eta$，使得 $a\in G$。G 是开集，$d=\rho(a,X-G)>0$。显然，若 $x\in X$，且 $\rho(a,x)<d$，则 $x\in G$。取自然数 $m>\dfrac{2}{d}\left(d(A_m)<\dfrac{1}{m}<\dfrac{d}{2}\right)$，且使 $a_m\in\{a_{n_k}\}$，$\rho(a,a_m)<\dfrac{d}{2}$，则对任何 $x\in A_m$，有

$$\rho(a,x)\leqslant\rho(a,a_m)+\rho(a_m,x)<\frac{d}{2}+\frac{1}{m}<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d$$

即 $x\in G$，$A_m\subset G$，矛盾。

定理 14 每一列紧的度量空间都是紧致的。

证明 设 η 是 X 的任一开覆盖，由定理 13，$\lambda=\lambda(\eta)$ 是开覆盖 η 的 Lebesgue 数。由定理 12，X 有一个 $\dfrac{\lambda}{3}$ - 网 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，于是 $X=\bigcup\limits_{k=1}^{n}U(a_k,\dfrac{\lambda}{3})$。因为 $d(U(a_k,\dfrac{\lambda}{3}))<\lambda$，存在 $G_k\in\eta$，使得 $U(a_k,\dfrac{\lambda}{3})\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$ 即 $\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$ 为 η 的有限子覆盖，X 紧致。

由定理 14 和下表知，可数紧致的度量空间是紧致的，序列紧致的度量空间是紧致的。因此，对度量空间有：

紧致 $\Longleftrightarrow$ 可数紧致 $\Longleftrightarrow$ 列紧



序列紧致

下面给出微积分中两个定理的推广形式。

定理 15 从紧致空间 X 到 R^1 的任一连续函数 f 有界,并且达到最大值和最小值。

证明 由定理 6,$f(X)$是 R^1 上的紧致子集,而紧致的度量空间是有界的(证明留作习题),由定理 3,$f(X)$是 R^1 上的有界闭集。所以 f 有界。由于 $f(x)$的上、下确界 $p,q\in f(X)$从而存在 $x_1,x_2\in X$ 使得$f(x_1)=p\ f(x_2)=q$,并且对任意 $x\in X,f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$,即 f 达到最大值和最小值。

定理 16 f 是由紧致的度量空间(X,ρ_1)到度量空间(Y,ρ_2)的连续函数,则 f 为一致连续,即任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\rho_1(x',x'')<\delta$ 时,必有 ρ_2(上述的 δ 仅与ε 有关,而与具体的点无关)。

证明 任给 $\varepsilon>0$,因为 f 连续,对任何 $x\in X$,存在 $\delta(x)>0$ 当 $x'\in U(x,\delta(x))$时,$\rho_2(f(x'),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$,由定理 13,$X$ 的开覆盖 $\eta=\{U(x,\delta(x))\mid x\in X\}$有一个 *Lebesgue* 数$\lambda$,对任何 $x',x''\in X$,如果 $\rho_1(x',x'')<\lambda$,则存在 $x\in X$,使 $x',x''\in U(x,\delta(x))$。于是 $\rho_2(f(x'),f(x''))\leqslant\rho_2(f(x'),f(x))+\rho_2(f(x),f(x''))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,$f$ 一致连续。

正如上述两个定理在微积分中是十分重要的,紧性在与拓扑空间有关的几乎任何一门学科中也都是十分重要的。

习　题

1. 证明离散空间是紧致的$\Leftrightarrow$它是有限的。

2. 证明拓扑空间 X 有限，则 X 的任何子集都是紧致的。

3. 考虑 $X=\{a,b,c,\}$，$\tau=\{X,\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\varnothing\}$，说明拓扑空间 X 的紧致子集不一定是闭集。

4. 证明定理 2。

5. 证明定理 4 的推论。

6. 证明每一序列紧致空间都是列紧空间。

7. 证明紧致的度量空间是有界的。

8. X 为例 4 的列紧空间，证明：

(1^0) X 不是紧致空间。

(2^0) Y 为 R^1 的子空间，$Y=\{1,2,3,\cdots\}$，$f:X\to Y$，$f(2n-1)=f(2n)=n$，则 f 连续，且 f 的象不列紧。

(3^0) $f:X\to R^1$：$f(2n-1)=f(2n)=\begin{cases} n & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ -n & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$，则 f 连续，且 f 无最大值、最小值。

(4^0) $Y=[0,1]$，为 T_2 空间，$f:X\to Y$，$f(2n-1)=f(2n)=1-\dfrac{1}{n}$，则 f 连续，且 f 不是闭映射。

9. 证明：度量空间 X 列紧$\Leftrightarrow X$ 中的每个点列必有收敛的子点列。

10. 证明定理 12。

11. 试用反证法证明定理 16。

第三章　微分流形

微分流形是具有微分结构的拓扑空间,因此,可以在微分流形上建立微积分。目前,微分流形的概念已成为现代数学的基本概念之一,它已渗透到许多数学领域,如微分方程、微分几何、微分拓扑等方面,在理论物理中如规范场论等也应用到微分流形。

§1　微分流形

数学的发展,势必从局部上的描述向大范围的描述与研究发展。关于局部即点的邻域的性质是否可以推广到大范围上?怎样推广?经过长期研究,才创造了微分流形这一概念,它是拓扑空间,而且是 Hausdorff 空间,而它的各个邻域都与欧氏空间的开邻域同胚。因此,微分流形上不仅有拓扑结构,而且有微分结构。微分流形的各个开邻域都利用微分同胚粘连起来,就为把已知的局部性质推广到大范围上去提供了一个理想的舞台。

定义 1　拓扑空间 M 满足以下条件:

(1) M 是 Hausdorff 空间;

(2) M 满足第二可数性公理;

(3) 对 M 中任意点 x,都有 x 在 M 中的一个邻域 U 同胚于 R^m 的一个开集。则称 M 是一个 m 维的拓扑流形。

设定义 1 中提到的同胚映射是 $\varphi_U: U \to \varphi_U(U) \subset R^m$,这里 $\varphi_U(U)$ 是 R^m 中的开集。因为 φ_U 是同胚,对任意点 $y \in U$,可以把 $\varphi_U(y) \in R^m$ 的坐标定义为点 y 的坐标,即令 $u^i = (\varphi_U(y))^i, y \in U, i = 1,2,\cdots,m$。称$(U,\varphi_U)$ 是 M 的一个坐标卡。坐标卡象地图

册，其作用相当于看每一页就像看到每一实貌 —— 坐标域 $\varphi_U(U)$。

在拓扑流形上可以定义连续函数，现在问，在拓扑流形上建立可微函数的概念还要增加什么条件？

设 (U,φ_U) 和 (V,φ_V) 是拓扑流形 M 上两个坐标卡，$U\cap V\neq\varnothing$，即迭置处重迭，我们将定义 1 中的条件进一步加强，即考虑迭置映射 $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}\Big|_{\varphi_U(U\cap V)}$ 应满足的条件。显然，$\varphi_U(U\cap V)$ 和 $\varphi_V(U\cap V)$ 是 R^m 中两个非空的开集，并且映射 $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}\Big|_{\varphi_U(U\cap V)}:\varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V)$ 建立了这两个开集之间的同胚，其逆映射就是 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}\Big|_{\varphi_U(U\cap V)}:\varphi_V(U\cap V)\to\varphi_U(U\cap V)$。这两个映射可分别表为 R^m 的开集上的 m 个实函数（图 1）：

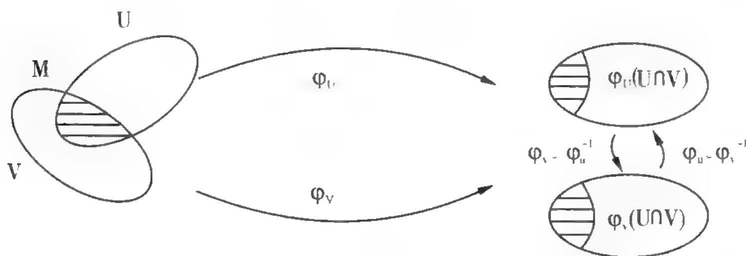


图1

$$y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m)=(\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^m))^i,$$
$$(x^1,\cdots,x^m)\in\varphi_U(U\cap V);$$
$$x^i=g^i(y^1,\cdots,y^m)=(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}(y^1,\cdots,y^m))^i,$$

$$(y^1,\cdots,y^m)\in\varphi_V(U\cap V)。$$

我们称两个坐标卡(U,φ_U)和(V,φ_V)是 C^r－相容的，如果 $U\cap V\neq\emptyset$ 时坐标变换函数$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$和$\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$(即 $f^i(x_1\cdots,x^m)$和 $g^i(y^1,\cdots,y^m)$都是 C^r类的。

$U\cap V=\emptyset$ 时，我们总认为(U,φ_U)和(V,φ_V)是 C^r－相容的。

我们知道，映射 $f:M\to R$ 称为在点 P 可微，若函数 $f\circ\varphi^{-1}$: $\varphi(U)\to R$在点$\varphi(P)$可微。上述可微性应与坐标卡的选取无关。若点 $P\in U\cap V$，(V,ψ)为点 P 的另一坐标卡，那么

$$f\circ\psi^{-1}=f\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ\psi^{-1})。$$

$f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to R$ 在点$\varphi(P)$可微，如果 $\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$在点 $\psi(P)$可微，则 $f\circ\psi^{-1}$在 $\psi(P)$也是可微的。由此可见，坐标转换函数 $\varphi\circ\psi^{-1}$可微是 M 上有可微函数概念的关键条件。

例 1：$M=S^1$，$U_1=S^1-\{e^{io}\}$，$\varphi_1:U_1\to(0,2\pi)\subset R^1$，$e^{ix}\to x$ $(0<x<2\pi)$，$U_2=S^1-\{e^{i\pi}\}$，$\varphi_2:U_2\to(\pi,3\pi)\subset R^1$，$e^{iy}\to y(\pi<y<3\pi)$(图 2)。

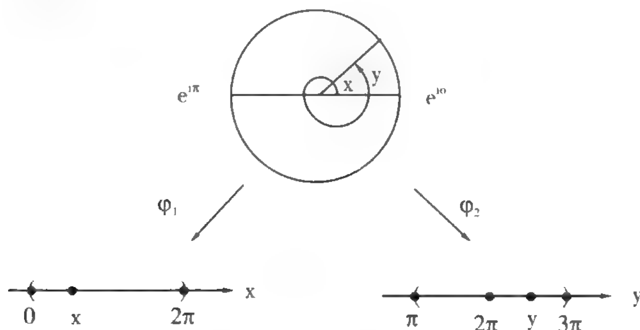


图 2

在 $U_1 \cap U_2$ 中,若 $e^{ix} = e^{iy}$,则

$$y = \begin{cases} x + 2\pi & 0 < x < \pi \\ x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

显然,y 是 x 的 C^∞ 类函数;反之 x 也是 y 的 C^∞ 类函数,(U_1, φ_1)和(U_2, φ_2)是 C^∞ – 相容的。

定义 2 设 M 是一个 m 维拓扑流形,如果 M 上给定了一个坐标卡集 $\mathscr{D} = \{(U, \varphi_U), (V, \varphi_V), (W, \varphi_W), \cdots\}$,满足以下条件:

(1)$\{U, V, W, \cdots\}$是 M 的一个开覆盖(覆盖性);

(2)属于 $\mathscr{D}$ 的任意两个坐标卡是 C^r – 相容的(相容性);

(3)$\mathscr{D}$ 是极大的,即对于 M 的任意一个坐标卡$(\tilde{U}, \varphi_{\tilde{U}})$,如果它与 $\mathscr{D}$ 中每一元都是 C^r – 相容的,则$(\tilde{U}, \varphi_{\tilde{U}})$必属于 $\mathscr{D}$(极大性);

则称 $\mathscr{D}$ 是 M 的一个 C^r – 微分结构。

在 M 上给定了一个 C^r – 微分结构,则称 M 是一个 C^r – 微分流形。若在 M 上确定了一个 C^∞ – 微分结构,则简称 M 是光滑流形。以下主要讨论光滑流形,简称流形。属于给定的微分结构的坐标卡称为 M 的容许的坐标卡,而 M 上点 x 附近的局部坐标系是指包含 P 点的容许坐标卡给出的坐标系。

例 2 $M = R^m$,取 $U = M$,φ_U 为恒同映射,则$\{(U, \varphi_U)\}$就是 R^m 的一个坐标覆盖,由此确定了 R^m 的光滑微分结构,称为 R^m 的标准微分结构,R^m 是微分流形。

例 3 m 维单位球面 $S^m = \{x \in R^{m+1} : x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$

以 $m = 1$ 为例,取如下四个坐标卡(图 3):

$U_1 = \{x \in S^1 : x_2 > 0\}$, $\varphi_{U_1}(x) = x_1$;

$U_2 = \{x \in S^1 : x_2 < 0\}$, $\varphi_{U_2}(x) = x_1$;

$V_1 = \{x \in S^1 : x_1 > 0\}$, $\varphi_{V_1}(x) = x_2$;

$V_2 = \{x \in S^1 : x_1 < 0\}$, $\varphi_{V_2}(x) = x_2$;

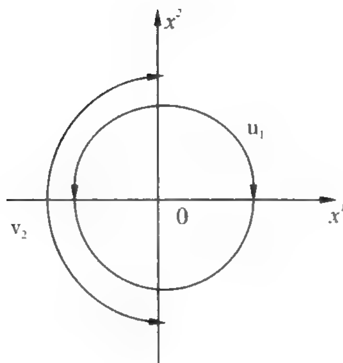


图 3

显然，$\{U_1, U_2, V_1, V_2\}$ 构成 S^1 的一个开覆盖，在交集 $U_1 \cap V_2$ 上，$x_2 = \varphi_{V_2} \circ \varphi_{U_1}^{-1}(x) = \sqrt{1 - x_1^2}$，反之，$x_1 = \varphi_{U_1} \circ \varphi_{V_2}^{-1}(x_2) = -\sqrt{1 - x_2^2}$，它们都是 C^∞ - 类函数，所以 (U_1, φ_{U_1}) 和 (V_2, φ_{V_2}) 是 C^∞_- 相容的。同样地，其余任意两个坐标卡也都是 C^∞ - 相容的，所以 S^1 是一维光滑流形。类似地，$S^m(m>1)$ 是 m 维光滑流形。

例 4 将底周长为 a 的圆柱面沿母线剪开，$(0, x_2)$ 与 (a, x_2) 视为同一点，用 $U: -\frac{a}{12} < x_1 < \frac{a}{3} + \frac{a}{12}$，$V: \frac{a}{3} - \frac{a}{12} < x_1 < \frac{2a}{3} + \frac{a}{12}$，$W: \frac{2a}{3} - \frac{a}{12} < x_1 < a + \frac{a}{12}$ 覆盖圆柱面(图 4)。局部坐标分别为：

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 \end{cases}, \begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_1 \end{cases}, \begin{cases} w_1 = x_1 \\ w_2 = x_2 \end{cases},$$

在 $U \cap V$ 中：$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \end{cases}$；在 $V \cap W$ 中，

$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 \end{cases}$；在 $W \cap U$ 中，$\begin{cases} u_1 = w_1 - a \\ u_2 = w_2 \end{cases}$。

因此，圆柱面是二维光滑流形。

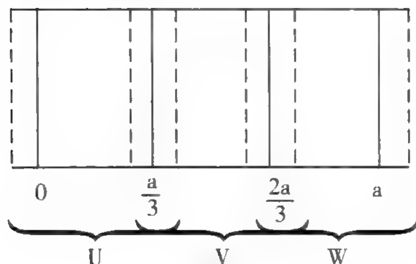


图4

例 5　R^3 中 $F(x^1,x^2,x^3)=0$ 所表示的曲面 M 是微分流形，设 F 是 C^r－类函数。任取点 $P_0\in M$，且$\frac{\partial F}{\partial x^1},\frac{\partial F}{\partial x^2},\frac{\partial F}{\partial x^3}$，在点 P_0 的值不同时为零，P_0 为正常点。不妨设$\frac{\partial F}{\partial x^3}\neq 0$。因此，在 R^3 中有以 P_0 为球心的开球 W，使得 M 在 W 中的点都可表为 $x^3=f(x^1,x^2)$，且$\left.\frac{\partial F}{\partial x^3}\right|_{x\in W\cap M}\neq 0$。我们在 M 上得开集 $U=W\cap M$，再把 U 按 x^3 轴的方向投影到平面 $x^3=0$ 上，得到 R^2 上与 U 同胚的区域。对于 M 上每点 P，都可以作出这样的开集 U，只不过有时必须用 x^1 或 x^2 来代替上述的 x^3。全体这样的开集覆盖了 M。设 U_1,U_2 为其中的两个开集，$U_1\cap U_2\neq\emptyset$，且 U_1,U_2 都按 x^3 轴的方向投影到平面 $x^3=0$ 上。令 $y^i=(\varphi_{U_1}\circ\varphi_{U_2}^{-1}(x))^i$，$x\in\varphi_{U_2}(U_1\cap U_2)$，则 $y^i=x^i$，$i=1,2$。所以坐标变换函数都是 C^r 类的，即 $\varphi_{U_1}\circ\varphi_{U_2}^{-1}$是 C^r 类的。同样地，$\varphi_{U_2}\circ\varphi_{U_1}^{-1}$也是 C^r 类的。如果 U_1,U_2 是沿不同坐标轴投影，不妨设 U_1 沿 x^3 轴投影，U_2 沿 x^2 轴投影。令 $y^i=(\varphi_{U_2}\circ\varphi_{U_1}^{-1}(x))^i$，$x\in\varphi_{U_1}(U_1\cap U_2)$，$i=1,3$。则 $y^1=x^1$，$y^3=f(x^1,x^2)$。所以 y^i 都是 C^r 类的，即 $\varphi_{U_2}\circ\varphi_{U_1}^{-1}$是 C^r 类的。

同样地，$\varphi_{U_1}\circ\varphi_{U_2}^{-1}$也是 C^r 类的。对于其他情形的 U_1,U_2，也可做类似的说明。因此，M 是二维微分流形。

类似地，R^{m+1}中 $F(x^1,\cdots,x^{m+1})=0$ 所表示的非空点集 M 是 m 维微分流形。若 $F(x^1,\cdots,x^{m+1})$为 $x^1,\cdots,x^{m+1}$的 C^r类函数，则 M 就是 C^r – 微分流形。

在定义 2 中，条件(1)和(2)是基本的。不难证明，若坐标卡集 $\mathscr{D}'$满足条件(1)和(2)，则 M 上必存在唯一的 C^r 微分结构 $\mathscr{D}$，使得 $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$。事实上，只需把 $\mathscr{D}'$扩大，考虑 M 上所有与 $\mathscr{D}'$中坐标卡 C^r – 相容的坐标卡集合 $\mathscr{D}$。显然，$\mathscr{D}$ 满足条件(1)和(3)。下证 $\mathscr{D}$ 还满足条件(2)。为此，设(V,ψ_V)和(W,ψ_W)在 $\mathscr{D}$ 内，$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}'$，$V\cap W\neq\emptyset$，则 $\psi_W\circ\psi_V^{-1}=(\psi_W\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\psi_V^{-1})$。由 $\mathscr{D}$ 的构造，知 $\psi_W\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 和 $\varphi_\alpha\circ\psi_V^{-1}$ 都是 C^r 类的，所以 $\varphi_W\circ\psi_V^{-1}$ 也是 C^r 类的，故条件(2)成立。于是，$\mathscr{D}$ 是由 $\mathscr{D}'$ 唯一确定的 C^r – 微分结构。因此，在构造微分流形时，只要指出它的一个 C^r – 相容的坐标覆盖即可。

如果我们把不存在微分结构的拓扑流形称为 C^0 流形，则 C^0 流形与 C^1 流形有本质的区别。存在不允许任何微分结构的拓扑流形，这样的流形维数最小是四维，已经知道的例子是八维的。

总之，从直观上看，微分流形是局部欧氏空间。它不仅局部同胚于欧氏空间，而且局部之间是用 C^r 类，其逆也为 C^r 类的坐标变换粘贴在一起。下面介绍几个复杂的例子。

例 6　二维射影空间 P^2是二维流形。

在 $R^3-\{0\}$中定义如下的等价关系 ~：设 $x,y\in R^3-\{0\}$，$x\sim y\Leftrightarrow$存在非零实数 λ，使 $x=\lambda y$。显然，~ 是等价关系。对 $x\in R^3-\{0\}$，x 的等价类记作$[x]=[x^1,x^2,x^3]$，等价类$[x]$几何直观地可看作是 R^3 中通过原点的直线 $l-\{0\}$。二维射影空间 P^2就是指商空间 $P^2=R^3-\{0\}/\sim\ =\{[x]:x\in R^3-\{0\}\}$。令 $U_i=\{[x^1,$

$x^2,x^3],x^i\neq 0\}$，而

$$\varphi_i=\begin{cases}(\frac{x^2}{x^1},\frac{x^3}{x^1}) & i=1\\(\frac{x^1}{x^2},\frac{x^3}{x^2}) & i=2\\(\frac{x^1}{x^3},\frac{x^2}{x^3}) & i=3\end{cases}$$

由商空间的定义，易知 U_i 是开集，$\{U_1,U_2,U_3\}$ 构成 P^2 的开覆盖，且在 $U_i\cap U_j$ 上，例如 $U_1\cap U_2$ 上，有坐标变换：

$$\eta^1=\frac{x^2}{x^1}=\frac{1}{\frac{x^1}{x^2}}=\frac{1}{\xi^1},\quad \eta^2=\frac{x^3}{x^1}=\frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{x^1}{x^2}}=\frac{\xi^2}{\xi^1},$$

这是 C^∞ 类的，故 P^2 是光滑二维流形。

对于一般的 n 维实射影空间的情形参看例 10。微分流形 M 的概念比欧氏空间 R^3 中的曲面广泛得多，参看例 8 和例 11。此外，一般微分流形上也不一定有距离的概念。若在 M 上引进了距离的概念，那么就得到黎曼流形，它是一类最重要的微分流形。

例 7 $M=\{(x,y)\mid(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\}$（双纽线）作为 R^2 的子拓扑空间不是 1 维流形。

（反证法）若 M 是 1 维流形，则存在含 $O(0,0)$ 点的一个开集 U 及同胚映射。

$$\varphi:U\to(a,b)\subset R^1,\varphi(0)=c\in(a,b)。$$

显然 $\varphi:U-\{(0)\}\to\{(a,c)\cup(c,b)\}$ 也是同胚映射，但 $U\to\{(0)\}$ 有四个通路连通分支，而 $\{(a,c)\cup(c,b)\}$ 只有两个道路连通分支，矛盾。

例 8 设 $M(m,n)$ 是所有 $m\times n$ 实矩阵的空间，$M(m,n)$ 可以认作为 R^{mn}，因此自然确定了一个 C^∞ 流形（当然也确定了一个实解析流形）。设 $M(m,n;k)$ 表示所有秩为 $k(0<k<min(m,$

n))的 $m \times n$ 矩阵的空间，以 $M(m,n)$的诱导拓扑为其拓扑，则 $M(m,n;k)$是一个 $k(m+n-k)$维的 C^∞流形(实解析流形)。

事实上，设 $X_0 \in M(m,n)$，如果 $rankX_0 = k$，则存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

这里 A_0 是 $k \times k$ 的非奇异矩阵。存在 $\varepsilon > 0$，如果矩阵 $A \to A_0$ 的所有元素的绝对值都小于 ε，则 A 是非奇异的。设 U^* 是满足下列条件的 X 全体：$X \in M(m,n)$且

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

这里 $A - A_0$ 的所有元素的绝对值小于 ε，则 U^* 是 $M(m,n)$的一个开集，如果 $X \in U^*$，则 $X \in M(m,n;k) \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$。因为

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

是非奇异的(这里 I_j 是 $j \times j$ 单位矩阵)，所以矩阵

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} \tag{2}$$

与

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

有相同的秩，但(2)右边的矩阵，秩为 $k \Leftrightarrow D = CA^{-1}$B。我们取 $U = U^* \cap M(m,n;k)$，(它是关于诱导拓扑的开集)为 $X_0 \in M(m,n;k)$的坐标邻域，相应的坐标映射由

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$$

定义，这里我们将 $R^{mn-(m-k)(n-k)} = R^{k(m+n-k)}$ 视作为所有形如

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$的空间，则映射 φ^{-1}由

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}$$

给出。

如果(U,φ)和$(\tilde{U},\tilde{\varphi})$是两个坐标系，$U\cap\tilde{U}\neq\varnothing$，则 $\tilde{\varphi}\cdot\varphi^{-1}$由

$$\tilde{\varphi}\cdot\varphi^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

给出，这里

$$\tilde{P}P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B} \end{pmatrix}。$$

因为(3)右边矩阵的每个元素都是矩阵 A、B、C 的元素的有理函数(也是实解析函数，是 C^∞ 函数)，所以上述 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$确定了一个 $k(m+n-k)$维的 C^∞ 微分构造(实解析构造)$\mathscr{D}$，于是$(M(m,n;k),\mathscr{D})$是 C^∞ 流形(实解析流形)。

例 9 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是 n_1 和 n_2 维 C^r 流形。

$$\mathscr{D}_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\},$$
$$\mathscr{D}_2=\{(U_\beta,\Psi_\beta)\}。$$

令

$$\mathscr{D}'=\{(U_\alpha\times V_\beta,h_{\alpha\beta})|(\bigcup_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1,(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathscr{D}_2\},$$

其中 $U_\alpha\times U_\beta$ 表示拓扑积，而

$$h_{\alpha\beta}:U_\alpha\times V_\beta\rightarrow\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\varphi_\beta(V_\beta)\subset R^{n_1}\times R^{n_2}=R^{n_1+n_2}$$
$$h_{\alpha\beta}(p,q)=(\varphi_\alpha(p),\psi_\beta(q))$$

是同胚映射。显然 $\mathscr{D}'$满足定义 1 中的条件(1^0),(2^0)。因此，它就确定了 $M_1\times M_2$ 上的微分构造 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2$，我们称 n_1+n_2 维的 C^r流形$(M_1\times M_2,\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2)$为 C^r流形$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$的积流形。

类似地，可以定义$(M_1\times\cdots\times M_k,\mathscr{D}_1\times\cdots\times\mathscr{D}_k)$。

例如，n 维环面

$$\underbrace{T^n = S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}}$$

是 n 维 C^∞ 流形。R^{n_1}和 R^{n_2}的 C^∞ 积流形是

$$R^{n_1} \times R^{n_2} = R^{n_1+n_2}。$$

设 X 是一个拓扑空间，$\sim$ 为 X 上的一个等价关系，用$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$表示 x 的等价类，对于任一子集 $A \subset X$，用$[A] = \{y \in X \mid y \sim \alpha, \alpha \in A\}$表示与 A 中元素等价的全部元素，以$X/\sim$表示等价类的集合，$\pi: X \to X/\sim, x \to [x]$表示自然投影 $\pi(x) = [x]$，且在$X/\sim$上定义商拓扑，即 $\pi^{-1}(V)$为 X 的开集，则 V 定义为 $X/\sim$ 中开集。显然 π 是连续映射。我们称拓扑空间$X/\sim$是 X 关于等价关系$\sim$的商(拓扑)空间。此外，如果对于一个开集 $A \subset X$，$[A]$也是 X 的开集时，则等价关系$\sim$称为开的。

引理 1　X 上等价关系$\sim$是开的，当且仅当自然投影 π 是开映射，如果 π 是开映射且 X 具有可数基，则 $X/\sim$ 也具有可数基。

证明　"$\Rightarrow$"　设 $A \subset X$ 为开集，$[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$，$\sim$是开的，则$[A]$是 X 的开集，从而 $\pi(A)$是$X/\sim$的开集，即 π 是开映射。

"$\Leftarrow$"　若 π 为开映射，$A \subset X$ 为开集，则 $\pi(A)$为$X/\sim$的开集，故 $\pi^{-1}(\pi(A)) = [A]$为 X 的开集，即$\sim$是开的。

设 π 是开映射且 X 具有可数基$\{U_i\}_{i \in Z}$，若 W 为$X/\sim$的开集，则 $\pi^{-1}(W) = \bigcup\limits_{j \in J} U_j$，$J \subset Z$。于是 $W = \bigcup\limits_{j \in J} \pi(U_j)$，从而$\{\pi(U_i)\}_{i \in Z}$为$X/\sim$的可数基。

引理 2　设$\sim$是拓扑空间 X 上的开的等价关系，若 $S = \{(x, y) \mid x \sim y\}$为 $X \times X$ 的闭子集，则商空间 $X/\sim$ 为 Hausdorff 空间。

证明　因为 S 为闭集，$(X \times X) - S$ 为开集。设 $\pi(x)$和 $\pi(y)$为$X/\sim$中两个不同的点，即 x, y 不等价，$(x, y) \in X \times X - S$。故存在 $X \times X$ 的开集$\tilde{U} \times \tilde{V}$，使$(x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V} \subset X \times X - S$，于是 $U = \pi(\tilde{U})$，$V = \pi(\tilde{V})$不相交。因为$\sim$是开的，U 和 V 为$X/\sim$中开

集，因此$X/\sim$为Hausdorff空间。

例 10 实射影空间 RP^n

令 $X=R^{n+1}-\{0\}$，X 中定义等价关系 $\sim$；如果存在 $\lambda\neq 0$，使 $y=\lambda x$，则 $y\sim x$。商空间$X/\sim$称为实射影空间。等价类$[x]\in X/\sim$可看作 R^{n+1}中过原点的直线，以下证明 RP^n是一个n维微分流形。

1^0. RP^n 具有可数基。设 λ 是非零实数，作映射 $\varphi_\lambda: X\to X$，$\varphi_\lambda(x)=\lambda x$。显然 φ 是同胚，且 $\varphi_\lambda^{-1}=\varphi_{\frac{1}{\lambda}}$。于是 $\varphi_\lambda(\lambda\neq 0)$均为开映射。故若 $U\subset X$ 为开集，则$[U]=\bigcup\limits_{\lambda\neq 0}\varphi_\lambda(U)$为开集，$\sim$为开的。因此自然投影 π 为开映射，因 X 具有可数基，由引理 1，$RP^n=X/\sim$具有可数基。

2^0. RP^n是 Hausdorff 的。定义实函数 $f: X\times X\to R$，

$f(x^1,\cdots,x^{n+1},y^1,\cdots y^{n+1})=\sum\limits_{i,j=1}^{n+1}(x^iy^j-x^jy^i)^2$，显然 f 是连续的，且 $f(x,y)=0\Leftrightarrow x\sim y$，因此 $S=\{(x,y)\mid x\sim y\}=f^{-1}(0)$是 $X\times X$ 的闭集。由引理 2，RP^n是 Hausdorff 的。

X 的等价类记作$[x]=[x^1,\cdots x^{n+1}]$。

命

$$\begin{cases}U_i=\{[x^1,\cdots x^{n+1}]\mid x^i\neq 0\},\\ \varphi([x])=({}_i\xi_1,\cdots {}_i\xi_{i-1},{}_i\xi_{i+1},\cdots,{}_i\xi_{n+1}),\end{cases}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n+1$，${}_i\xi_h=\dfrac{x^h}{x^i}(h\neq i)$。显然，$\{U_i,1\leqslant i\leqslant n+1\}$构成 RP^n的开覆盖，在 $U_i\cap U_j(i\neq j)$上有坐标变换

$$\begin{cases}{}_j\xi_h=\dfrac{{}_i\xi_h}{{}_i\xi_j} \qquad (h\neq i,j)\\ {}_j\xi_i=\dfrac{1}{{}_i\xi_j}\end{cases}$$

所以$\{(U_i,\varphi_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$给出了 RP^n的光滑结构。

例 11　Grassmann 流形

记 μ_{kn}为 $k\times n$ 矩阵的全体，则 μ_{kn}为 kn 维 C^∞ – 微分流形，记 $F(k,m)$为秩为 k 的 $k\times n$ 矩阵的全体，则 $F(k,m)$为 μ_{kn}的开子集，它是一个具有可数基的 Hausdorff 空间。用 $X_1,\cdots,X_k$ 表示元素 $X\in F(k,m)$的行向量，即 $X_a=(x_a^1,\cdots,x_a^n)$。每个 X 决定 n 维向量空间 R^n 的一个 k 平面，即由 $X_1,\cdots,X_k$ 张成的子空间，并且两个元素 X 和 Y 确定同一个 k 平面当且仅当 $Y=AX$，其中 $A\in GL(k,R)$。在 $F(k,m)$中定义等价关系 ~ : $Y\sim X$ 当且仅当 $Y=AX$，$A\in GL(k,R)$。商空间 $G_{k,n}=F(k,m)/\sim$ 的等价类$[X]$可看作 R^n 中 k 维平面，自然投影 $\pi(X)=[X]$。以下证明 $G_{k,n}$是一个微分流形。

1^0.　$G_{k,n}$有可数基。设 $A\in GL(k,R)$，作映射 $\varphi_A:F(k,m)\to F(k,m)$，使 $\varphi_A(x)=AX$，显然 φ_A 连续且逆映射 $\varphi_A^{-1}=\varphi_{A^{-1}}$连续，因此 φ_A 是同胚，于是 φ_A 是开映射（对所有 $A\in GL(k,R)$）。故若 $U\subset F(k,m)$为开集，则$[U]=\bigcup\limits_{A\in GL(k,R)}\varphi_A(U)$为开集，即 ~ 为开的。由 $F(k,m)$有可数基，从引理 1 知 $G_{k,n}$有可数基。

2^0.　$G_{k,n}$是 Hausdorff 的。定义实函数 $f:F(k,m)\times F(k,m)\to R$：

$$f(X,Y)=\sum_{l=1}^{k}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k+1}\leqslant n}\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & \cdots & x_1^{i_{k+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_k^{i_1} & \cdots & \cdots & x_k^{i_{k+1}} \\ y_l^{i_1} & \cdots & \cdots & y_l^{i_{k+1}} \end{vmatrix}^2。$$

显然 $X\sim Y$ 当且仅当$f(X,Y)=0$，所以 $S=\{(X,Y)\mid Y\sim X\}=f^{-1}(0)$为 $F(k,n)\times F(k,n)$的闭子集。由引理 2，$G_{k,n}$是 *Hausdorff* 的。

3^0.　给出 $G_{k,n}$上的微分结构。令 $J=(j_1,\cdots,j_k)$是$(1,\cdots,n)$的一个有序子集，J'为 J 的其余有序子集，例如 $J=(1,\cdots,k)$，J'

$=(k+1,\cdots,n)$。用 X_J 表示 $k\times n$ 矩阵 X 的 $k\times k$ 子矩阵 $(x_i^{j_l})$，$1\leqslant i,l\leqslant k$，$X_j$ 表示 X 除去 $j_1,\cdots,j_k$ 列后得到的 $k\times(n-k)$ 余子矩阵。记 $\tilde{U}_J=\{X\in F(k,m)\mid det(X_J)\neq 0\}$，$U_J=\pi(\tilde{U}_J)$，则 U_J 为 $G_{k,n}$ 的开集，每个 $X\in\tilde{U}_J$ 等价于 $k\times m$ 矩阵 $X^*=X_J^{-1}X$，X^* 的子矩阵 X_j^* 是单位矩阵。定义映射 $\varphi_J:U\to\mu_{k(m-n)}$ 如下：

$$\varphi_J([X])=X_j^*=\begin{bmatrix} x_1^{*\,j_{k+1}} & \cdots & x_1^{*\,j_{n-k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_k^{*\,j_{k+1}} & \cdots & x_k^{*\,j_{n-k}} \end{bmatrix}。$$

注意到对任意 $k\times k$ 矩阵 B，有 $(BX)_J=BX_J$，所以当 $Y=AX$ 时（A 可逆），$Y_J=AX_J$，且 $det(X_J)\neq 0\Leftrightarrow det(Y_J)\neq 0$。因此，$Y^*=Y_J^{-1}Y=X_J^{-1}A^{-1}AX=X_J^{-1}X=X^*$，于是 $Y_j^*=X_j^*$，可见 φ_J 是完全确定的。反之，若 $Y_j^*=X_j^*$，则 $X_J^{-1}X=X^*=Y^*=Y_J^{-1}Y$，于是 $Y=(Y_JX_J^{-1})X$，即 $[Y]=[X]$，φ_J 是连续的，单的和满的。$\varphi_J^{-1}(X_j^*)=[X]$ 也是连续的。事实上，φ_J^{-1} 是连续映射 $P:\mu_{k(n-k)}\to\mu_{kn}$，$X_j^*\to X^*$ 与 π 的复合，即 $\varphi_J^{-1}=\pi\circ P$。

由于坐标转移函数是有理分式函数，所以是 C^∞ 的，这样 $G_{k,n}$ 为 $k(n-k)$ 维 C^∞ 流形，称 $G_{k,n}$ 为 Grassmann 流形。

习　题

1. 仿照 S^2 证明 S^n 是 n 维 C^∞ 流形。

2. 用下面方法证明 $S^1\times S^2$ 是 C^∞ 流形：

(1^0)利用例 1 和例 9。

(2^0)构造 $\mathscr{D}'$，使 $\mathscr{D}'$ 中仅有三个元素，其中每一个在 R^2 中的同胚象为正方形，以此证明 $S^1\times S^1$ 是 C^∞ 流形。

(3^0)^0 能构造 $\mathscr{D}'$，使 $\mathscr{D}'$ 中仅有两个元素吗？如果 $\mathscr{D}'$ 中元素都是单连通的呢？

3. 证明闭区间不是1维流形。

4. 证明一个流形 M 必是 T_1 空间(利用 T_2 空间或局部欧)和 A_1 空间。

5. 定义2中 $\mathscr{D}$ 的坐标邻域的全体是否就是 τ? 举例说明。但是否是一个拓扑基?

§2 切向量、余切空间和切映射

在 R^n 中,$\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$是一条曲线,矢量

$$v=v'(t_0)=\left(\frac{dx^1}{dt}\mid_{t=t_0},\cdots,\frac{dx^n}{dt}\mid_{t=t_0}\right) \qquad (3.1)$$

为曲线在 $\gamma(t_\circ)$的切矢量,定义算子 $D_v: C_p^\infty(R^n)\to R$,其中 $p=\gamma(t_0)$,使得

$$\begin{aligned}D_v(f)&=\frac{d(fo\gamma(t))}{dt}\bigg|_{t=t}=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_\circ}f(x^1(t),\cdots,x^n(t))\\&=\frac{\partial f}{\partial x^1}\bigg|_p\frac{dx^1}{dt}\bigg|_{t=t_\circ}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}\bigg|_p\frac{dx^n}{dt}\bigg|_{t=t_\circ}\\&=<\nabla f(p),v>, \end{aligned} \qquad (3.2)$$

其中 $\nabla f(p)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_p$,不难验证 D_v 是线性的且满足 Leibniz 法则(习题),由于 D_v 与 v 之间是一一对应的,不妨将 D_v 与 v 等同起来看待,将过点 p 的切矢量 v 视作方向微分算子 D_v,即

$$v(f)=<\nabla f(p),v>=\frac{d(f\circ\gamma(t))}{dt}\mid_{t=t_\circ},$$

那么 v 是线性的且满足 Leibniz 法则,这样定义的 v 不涉及 R^n 的线性结构,((3.1)定义的 v 涉及 R^n 的线性结构),因此能推广到微分流形上来。

定义1 设 M 是一个 m 维 C^r 流形,$x\in M$,如果映射 $v: C_x^\infty\to R$ 满足

1° $\forall f,g\in C_x^\infty$,有 $v(f+g)=v(f)+v(g)$,

2° $\forall f\in C_x^\infty,\lambda\in R$,有 $v(\lambda f)=\lambda v(f)$,

3° $\forall f,g\in C_x^\infty$,有 $v(fg)=f(x)v(g)+g(x)v(f)$,

则称 v 为 M 在 x 的一个切矢量。

例 1 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 C^r 微分流形 M 上经过 x_o 的一条光滑曲线,$\gamma(0)=x_o$,则 γ 确定了一个映射 $v:C_{x_0}^r\to R$:

$$v(f)=\left.\frac{d(f\circ\gamma(t))}{dt}\right|_{t=t_0}。$$

由于 $f\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to R$ 是在 $t=t_0$ 的光滑函数,$\left.\frac{d(f\circ\gamma(t))}{dt}\right|_{t=t_0}$ 有定义且对 $\forall f,g\in C_{x_0}^r,\forall\lambda\in R$

$$\begin{aligned}v(f+g)&=\left.\frac{d((f+g)\circ\gamma(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\\&=\left.\frac{d(f(\gamma(t)))}{dt}\right|_{t=t_0}+\left.\frac{d(g(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\\&=v(f)+v(g)。\end{aligned}$$

同理可验证

$$v(\lambda f)=\lambda v(f)$$

$$v(fg)=f(x_0)v(g)+g(x_0)v(f),$$

因此 v 是一个 M 在 x_0 的切矢量。

定理 1 设 M 是 m 维光滑流形,$x_0\in M$,用 $T_{x_0}M$ 表示 M 在 x_0 的切矢量构成的集合,则 $T_{x_0}M$ 是 m 维向量空间,称 $T_{x_0}M$ 为 M 在 x_0 的切空间。

证明 定义 $T_{x_0}M$ 中的加法与数乘法如下:$\forall u,v\in T_{x_0}M$, $\forall f\in C_{x_0}^\infty,\lambda\in R$

$$(u+v)(f)=u(f)+v(f)$$

$$(\lambda u)(f)=\lambda u(f)$$

显然 $u+v,\lambda u$ 适合定义 3.1 的条件(1),(2),(3),因此 $u+v,\lambda u \in T_{x_0}M$。容易验证向量空间的各个条件是满足的,于是 $T_{x_0}M$ 是一个向量空间。

为证明 $\dim T_{x_0}M = m$,要找出 $T_{x_0}M$ 中的 m 个线性无关的切向量构成 $T_{x_0}M$ 的基。为此设 M 在 x_0 处的坐标卡 (U,φ),相应的局部坐标系 $\{x^i\}$,即

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i, \forall p \in U,$$

固定指标 j,令 $\gamma_j:(-\varepsilon,\varepsilon)\to R$,使,

$$x^i(\gamma_j(t)) = x_0^i + \delta_j^i t,$$

即

$$(\varphi(\gamma_j(t)))^i = x_0^i + \delta_j^i t。$$

定义映射 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}: C_{x_0}^{\infty}\to R$ 如下:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}(f) = \left.\frac{d(f\circ\gamma_j(t))}{dt}\right|_{t=t_0}$$

由例 1 知 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}$ 为 x_0 处的一个切矢量,且

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}(f) &= \left.\frac{d(f\circ\varphi^{-1}(\varphi(\gamma_j(t)))}{dt}\right|_{t=t_0} \\
&= \left.\frac{d(f\circ\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x_0^j+t,x_0^{j+1},\cdots,x_0^m))}{dt}\right|_{t=t_0} \\
&= \left.\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x_0)} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

以下证明由(3.3)式定义的 m 个切矢量,$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0},\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_{x_0}$ 构成 $T_{x_0}M$ 的基。

因为 $f\circ\varphi^{-1}\in C_{\varphi(x_0)}^{\infty}$ 为 $\varphi(x_0)\in R^m$ 处的光滑函数,取 $\varphi(x_0)$

充分小的邻域使 $f\circ\varphi^{-1}$ 在该邻域内连续，且对该邻域内任意点 $(x^1,\cdots,x^m)$ 线段 $(x_0^1,\cdots,x_0^m)+t(x^1-x_0^1,\cdots,x^m-x_0^m)$ 落到该邻域内 $(0\leqslant t\leqslant 1)$，那么

$$f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)-f\circ\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0^m)$$

$$=\int_0^1\frac{d}{dt}f\circ\varphi^{-1}(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\cdots,x_0^m+t(x^m-x_0^m))dt$$

$$=\sum_{i=1}^m(x^i-x_0^i)\int_0^1\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\cdots,x_0^m+t(x^m-x_0^m))dt$$

令 $h_i(x^i,\cdots,x^m)=\int_0^1\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\cdots,x_0^m+t(x^m-x_0^m))dt$

则 $h_i(x_0^1,\cdots,x_0^m)=\left.\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x_0)}$. 因此有下面的结论：

$$f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots x^m)=f\circ\varphi^{-1}(x_0^1\cdots,x_0^m)+\sum_{i=1}^m(x^i-x_0^i)h_i(x^i,\cdots,x^m),\qquad(3.4)$$

其中 $h_i\in C^\infty_{\varphi(x_0)}$ 且 $h_i(x_0^1\cdots,x_0^m)=\left.\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x_0)}$。由于 $f\in C^\infty_{x_0}$，所以在 x_0 充分小邻域内

$$f(x)=f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))=f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m),$$

所以(3.4)可写成

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^m(x^i-x_0^i)g_i(x)\qquad(3.5)$$

其中 $g_i\in C^\infty_{x_0}$ 且 $g_i(x_0)=h_i(\varphi(x_0))=h_i(x_0^1,\cdots,x_0^m)=\left.\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right|_{x_0}=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}(f)$。

对 $\forall\, v\in T_{x_0}M$ 及 $\forall\,\lambda\in R$，由于 $v(1)=v(1\cdot1)=v(1)+v(1)=2v(1)$，所以 $v(1)=0$，从而 $v(\lambda)=v(\lambda\cdot1)=\lambda v(1)=0$. 于是将 v 作用在(3.5)两端就有

$$v(f)=\sum_{i=1}^{m}v(x_i)g_i(x_0)=\sum_{i=1}^{m}v(x_i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}(f)$$

即
$$v=\sum_{i=1}^{m}v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}$$

可见任何切矢量可表成$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\right\}$的线性组合。如果零向量 0 有表达式

$$0=\sum_{i=1}^{m}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}$$

由
$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}(x^j)=\delta_i^j$$

推出 $a^j=0\quad(1\leqslant j\leqslant m)$，这就证明了$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\,\bigg|\,1\leqslant j\leqslant m\right\}$为 $T_{x_0}M$ 的基。

定理 2 设 M 为光滑流形，(U,φ)和(V,ψ)为 $x_0\in M$ 处两个不同坐标卡，相应坐标系为$\{x^i\}$和$\{y^i\}$，坐标转换为

$$x^i=(\varphi\circ\psi^{-1})^i(y^1,\cdots,y^m)$$

则自然基$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\right\}$与$\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{x_0}\right\}$的转换关系为

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{x_0}=\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})^j}{\partial y^i}\bigg|_{\psi(x_0)}\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{x_0}$$

证明 由定理 1 知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{x_0}&=\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{x_0}(x^j)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{x_0}\\&=\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})^j}{\partial y^i}\bigg|_{\varphi(x_0)}\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{x_0}\end{aligned}\tag{3.7}$$

定义 2 切空间 $T_{x_0}M$ 的对偶空间 $T_{x_0}^*M$ 称 M 在 x_0 的余切空间，$T_{x_0}^*M$ 的向量称为余切向量。

对每个 $f\in C_{x_0}^{\infty}$,定义映射 $df:T_{x_0}M\to R$ 使

$$df(v)=v(f),\ \forall\, v\in T_{x_0}M \tag{3.8}$$

则 df 是线性映射,所以 $df\in T_{x_0}^{*}M$,特别对 $x_0\in M$ 的局部坐标系 (U,x^i),坐标函数 x^i 对应的映射 $dx^i\in T_{x_0}^{*}M$,
并且

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{x_0}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{x_0}(x^i)=\delta_j^i$$

可见 $\{dx^i\}$ 为 $T_{x_0}^{*}M$ 的基且为 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\right\}$ 的对偶基,对 $\forall\,\alpha\in T_{x_0}^{*}M$,有

$$\alpha=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\right)dx^i \tag{3.9}$$

特别对 $f\in C_{x_0}^{\infty}$,有

$$df=df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\right)dx^i=\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}(f)\,dx^i \tag{3.10}$$

称余切矢量 df 为函数 f 在 x_0 的微分。

定义 3 设 $f:M\to N$ 是光滑流形之间的光滑映射,$x_0\in M$,映射 $f^{*}:C_{f(x_0)}^{\infty}\to C_{(x_0)}^{\infty}$ 使对 $\forall\, g\in C_{f(x_0)}^{\infty}$

$$f^{*}(g)=g\circ f \tag{3.11}$$

称 f^{*} 为拉回映射。

定义 4 设 $f:M\to N$ 是光滑流形之间的光滑映射,$x_0\in M$,

对每个 $v\in T_{x_0}M$,规定一个映射 $f_{*}v:C_{f(x_0)}^{\infty}\to R$,使对 $\forall\, g\in C_{f(x_0)}^{\infty}$

$$f_{*}(v)(g)=v(f^{*}g) \tag{3.12}$$

容易验证映射 $f_{*}v$ 是线性的且满足 Leibniz 法则,因此 $f_{*}v\in T_{f(x_0)}N$,$f_{*}:T_{x_0}M\to T_{f(x_0)}N$,$f_{*}:v\to f_{*}v\in T_{f(x_0)}N$ 称为切映射。

定理 3 切映射 $f_{*}:T_{x_0}M\to T_{f(x_0)}N$ 是线性映射。

证明 $\forall u,v\in T_{x_0}M,\forall g\in C^{\infty}_{f(x_0)}$

$$\begin{aligned}
&f_*(u+v)(g)\\
&=(u+v)(f^*g)\\
&=(u+v)(g\circ f)\\
&=u(g\circ f)+v(g\circ f)\\
&=u(f^*g)+v(f^*g)\\
&=f_*u(g)+f_*v(g)\\
&=(f_*u+f_*v)(g)
\end{aligned}$$

所以有 $f_*(u+v)=f_*u+f_*v$,同理可证,对 $\forall\lambda\in R$,有

$$f_*(\lambda u)=\lambda f_*(u)$$

定义 5 设 $f:M\to N$ 是光滑流形间的光滑映射,$\forall x_0\in M$,$f_*:T_{x_0}M\to T_{f(x_0)}N$ 为切映射,映射 $f^*:T^*_{f(x_0)}N\to T^*_{x_0}M$ 使 $\forall\alpha\in T^*_{f(x_0)}N$

$$(f^*\alpha)(v)=\alpha(f_*v),\forall v\in T_{x_0}M \tag{3.13}$$

称 f^* 为余切映射。

显然,f^* 是线性的。

设映射 $f:M\to N$ 在 x_0 的邻域内的局部表示为

$$y^{\alpha}=f^{\alpha}(x^1,\cdots,x^m),\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant n$$

$T_{x_0}M$ 和 $T_{f(x_0)}N$ 的自然基分别为 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\bigg|_{f(x_0)}\right\}$,对偶基分别为 $\{dx^i\}$ 和 $\{dy^{\alpha}\}$,那么有下面的结论:

定理 4 f_* 和 f^* 的局部表示分别为

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\right)=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\bigg|_{f(x_0)} \tag{3.14}$$

$$f^*(dy^{\alpha})=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}dx^i \tag{3.15}$$

证明　由(3.12),对任意函数 $g\in C^{\infty}_{f(x_0)}$, $f_*\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}(g)=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}(f^*g)=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}(g\circ f)$,特别对 $y^\alpha\in C^{\infty}_{f(x_0)}$,有 $f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}\right)(y^\alpha)=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}(y^\alpha\circ f)=\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\Big|_{x_0}$。令

$$f_*\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}=A_i^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{x_0}$$

两端对 y^β 作用得到

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\Big|_{x_0}=A_i^\beta$$

这就证明了(3.14)。由(3.13)及(3.14),有

$$\begin{aligned}f^*(dy^\alpha)&=f^*(dy^\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}\right)dx^i\\&=dy^\alpha\left(f_*\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}\right)dx^i\\&=dy^\alpha\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\Big|_{x_0}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\Big|_{f(x_0)}\right)dx^i\\&=\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\Big|_{x_0}dy^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\Big|_{f(x_0)}\right)dx^i\\&=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\Big|_{x_0}dx^i\end{aligned}$$

推论　设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^r 流形, C^k映射($k\leqslant r$) $f:M\to N$ 是浸入当且仅当

$$\dim(f_*T_pM)=m(\leqslant n),\quad\forall p\in M。$$

习　题

1. 证明(3.2)式定义的 $D_v:C_p^\infty(R^n)\to R$ 是线性的且满足

Leibniz 法则。

2. $f:M\to N$ 为光滑映射，$f^*:T^*_{f(x_0)}N\to T^*_{(x_0)}M$ 为余切映射。

(1°) 证明：对 $\forall g\in C^\infty_{f(x_0)}$，有

$$f^*(dg)=\frac{\partial g}{\partial y^\alpha}\bigg|_{f(x_0)}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}dx^i$$

其中 $y^\alpha=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m)\quad(1\leqslant\alpha\leqslant n)$ 为 f 的局部表示。

(2°) 证明：对 $\forall g\in C^\infty_{f(x_0)}$，有

$$f^*(dg)=d(g\circ f)=d(f^*g)$$

3. 设 M,N 是光滑流形且 M 是连通的，$f:M\to N$ 是光滑映射，证明：若在每一点 $p\in M$ 有 $f_{*p}=0$，则 f 是常值映射。

4. 映射 $f:R^2\to R^2$ 定义为

$$y_1=x_1e^{x_2}+x_2,\quad y_2=x_1e^{x_2}-x_2$$

证明 f 是光滑同胚，并且求切映射 f^* 和余切映射 f^* 在自然基底下的矩阵。

5. 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 分别是光滑流形间的光滑映射，则复合映射 $g\circ f:X\to Z$ 的切映射 f_* 适合链法则：$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*:T_pX\to T_pZ$，$p\in X$。

§3 子流形

先回顾分析学中的反函数定理。设 D 是 R^n 中的开区域，$f:D\to R^n$ 是光滑映射。若映射 $f=(f^1,\cdots,f^n):D\to R^n$，$f(x^1,\cdots,x^n)=(f^1(x^1\cdots x^n),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^n))$

即

$$y^1=f^1(x^1,\cdots,x^n)$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$y^n=f^n(x^1,\cdots,x^n)$$

在点 P 的秩 = $rank(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\bigg|_P) = n$，则存在点 P 的邻域 $U \subset D$ 及 $f(p)$ 的邻域 $V \subset R^n$，使 $f|_U: U \to V$ 是光滑同胚。

定义 1　设 M、N 分别是 m、n 维光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射，$x_0 \in M$，$f_{*x_0}: T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ 是切映射，$dim(f_* T_{x_0}M)$ 称为 f 在点 x_0 的秩，记为 $rank_{x_0}(f)$，即 $rank_{x_0}(f) = dim(f_* T_{X_0}M)$。

若 x_0 的坐标系为 (U, x^i)，$f(x_0)$ 的坐标系为 (V, y^α)，则由

$$f_* \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_{x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_{f(x_0)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n}\bigg|_{f(x_0)} \end{pmatrix}$$

知，$rank_{x_0}(f) = rank_{x_0}(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\bigg|_{x_0})$。

若 $m \leqslant n$，$rank_{x_0}(f) = m$，则称 f_{*x_0} 非退化。若 f_{*x_0} 在点 x_0 非退化，则存在 x_0 的邻域，f_{*x_0} 非退化。

定理 1　设 M、N 是光滑流形，$dimM = dimN$。若光滑映射 $f: M \to N$ 满秩，则存在 x_0 的邻域 U，使 $f|_U: U \to V = f(U)$ 是可微同胚。

证明　由于 $f: M \to N$ 光滑和光滑映射的定义，存在点 x_0 的坐标卡 $(\tilde{U}, \varphi)$ 及 $f(x_0)$ 的坐标卡 $(\tilde{V}, \psi)$，使 $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$ 且

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(\tilde{U}) \to \psi(\tilde{V})$$

光滑，$rank_{x_0}(f) = rank_{x_0}(\tilde{f}) = n$，由隐函数定理，存在 $\varphi(x_0)$ 的邻域 $U' \subset \varphi(\tilde{U})$，使 $\tilde{f}: U' \to V' = \tilde{f}(U')$ 是微分同胚。令

$$U = \varphi^{-1}(U'), V = \psi^{-1}(V')$$

则 U、V 分别为 x_0、$f(x_0)$ 的邻域且 $f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi: U \to V$ 是微分同

胚。

定理 2 设 M 是 m 维光滑流形，N 是 n 维光滑流形，$m<n$。$f:M\to N$ 光滑。若 $f_*:T_PM\to T_{f(p)}N$ 非退化，则存在 P 的局部坐标系(U,x^i)及点 $q=f(p)$的局部坐标系(V,y^α)，使 $f(U)\subset V$，且 $f|_U$ 有局部表示：

$$y^i\circ f=y^i(x^1,\cdots,x^m)=x^i,1\leqslant i\leqslant m;$$
$$y^\nu\circ f=y^\nu(x^1,\cdots,x^m)=0,m+1\leqslant\nu\leqslant n,$$

即 f 局部表示为$f(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)$。

证明 取 p 的局部坐标系(U,x^i)，$f(p)=q$ 的局部坐标系(V,y^α)，使 $f(U)\subset V$，则 $f|_U$ 的局部表示 $y^\alpha=y^\alpha(x^1,\cdots,x^m)$，$1\leqslant\alpha\leqslant n$。

设 $x^i(p)=0$，$y^\alpha(f(p))=0$，f_* 在点 p 非退化，则不妨设

$$\left.\frac{\partial(f^1,\cdots,f^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|_0\neq 0$$

记方体 $I_{n-m}=\{(x^{m+1},\cdots,x^n)\mid |x^\nu|<\delta,m+1\leqslant\nu\leqslant n\}$，定义光滑映射

$$\hat{f}:U\times I_{n-m}\to V$$

使 $\hat{f}^i(x^1,\cdots,x^m,x^{m+1},\cdots,x^n)=f^i(x^1,\cdots,x^m)$

$\hat{f}^\nu(x^1,\cdots,x^m,x^{m+1},\cdots,x^n)=x^\nu+f^\nu(x^1,\cdots,x^m)$

则

$$\left.\frac{\partial(\hat{f}_1,\cdots,\hat{f}_n)}{\partial(x_1,\cdots,x^n)}\right|_0=det\begin{pmatrix}I_m & * \\ O & I_{n-m}\end{pmatrix}=1\neq 0,$$

缩小区域，$\hat{f}$: $U\times I_{n-m}\to V$ 是光滑同胚，$f|_U=\hat{f}|_{U\times\{0\}}$，从而$(x^1,\cdots,x^m,x^{m+1},\cdots x^n)$可取为 V 上的局部坐标系，$\hat{f}$ 的局部表达式是恒同映射：$\hat{f}(x^1,\cdots,x^n)=(x^1,\cdots,x^n)$且 $f(x^1,\cdots,x^m)=\hat{f}(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)$。

推论 f_* 在点 p 非退化，则 f 在 p 的邻域内是单射(共同状况

原理)。

定义 2 设 M、N 分别是光滑流形，$dimM=m$，$dimN=n$，$m\leqslant n$，$\forall p\in M$，$f_*:T_pM\to T_{f(p)}N$ 非退化，则称 f 是 M 到 N 的浸入，(f,M) 称为 N 的 m 维浸入子流形。

例 1 光滑曲线 $\gamma:(a,b)\to R^3$，$\gamma'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$，如果 $\gamma'(t)\neq 0$，$t\in(a,b)$，则 γ 是浸入。

考虑曲面 $f:U\subset R^2\to R^3$，$f(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，

如果 $rank\begin{pmatrix} x_u\ y_u\ z_u \\ x_v\ y_v\ z_v \end{pmatrix}=2$ 对每点 $p\in U$ 成立，则 f 是浸入。由于

$$f_u\times f_v=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

即 $rankf=2$ 等价于 $f_u\times f_v\neq 0$ 对每点 $(u,v)\in U$ 成立，几何意义是曲面 f 的每点都有一个切平面。

例 2 映射 $F:R\to R^2$ 定义为

$$F(t)=(2cos(t-\frac{\pi}{2}),sin2(t-\frac{\pi}{2}))$$

(图 1)。

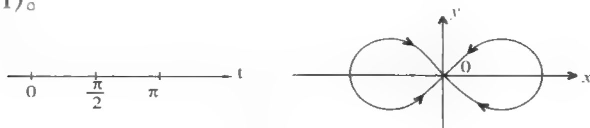


图 1

$F_*\frac{\partial}{\partial t}=\frac{dF}{dt}=(-2Sin(t-\frac{\pi}{2}),2cos(t-\frac{\pi}{2}))\neq 0$（因为 $\frac{1}{4}\|\frac{dF}{dt}\|^2=sin^2(t-\frac{\pi}{2})+cos^2(t-\frac{\pi}{2})=1$）。所以 F 是浸入子流形。

例 3 $G(t)=(2cos(2arctgt-\frac{\pi}{2}),(sin2(2arctgt-\frac{\pi}{2}))$(图 2)，易知 G 是浸入，但 G 不是嵌入。事实上，G^{-1}不连续，这是由于$(G^{-1})^{-1}(U)=G(U)$不是 R^2 中的开集与曲线 Γ 的交的缘故。

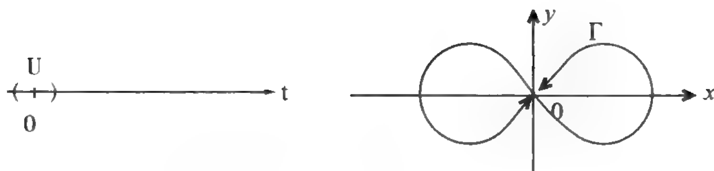


图 2

定义 3 设 $f:M\to N$ 是光滑浸入,如果

(1)f 是单一的;

(2)$f:M\to f(M)$(取 N 的子空间的拓扑)是同胚,则称(f,M)是 N 的嵌入子流形。

定理 3 设 $\varphi:M\to N$ 是单一的光滑浸入,且 M 紧致,则(φ,M)是 N 的嵌入子流形。

证明 已知拓扑学定理"紧致拓扑空间到 T_2 空间的一一在上的连续映射必是同胚。"由 φ 光滑、单一,$\varphi:M\to\varphi(M)$是一一在上的连续映射,M 紧致,且 $\varphi(M)$是 T_2 空间(T_2 空间的子空间仍是 T_2 空间),所以 $\varphi:M\to\varphi(M)$是同胚,(φ,M)是嵌入。

定理 4 $\varphi:M\to N$ 是单一的浸入,则 φ 是嵌入$\Leftrightarrow$在每点 $p\in M$,存在点 $q=\varphi(p)$在 N 中的局部坐标系(V,y^{α}),使得 $y^{\alpha}(q)=0$,且

$$\varphi(M)\cap V=\{s\in V\mid y^{\nu}(s)=0,m+1\leqslant\nu\leqslant n\}\qquad(4.1)$$

证明 $\Rightarrow$ 假定 φ 是嵌入,当然也是浸入,由定理 2,存在点 P 的局部坐标系(U,x^{i})和 $q=\varphi(P)$的局部坐标系(V,y^{α}),使 $\varphi(U)\subset V$,且

$$\varphi(U)=\{s\in V\mid y^{\nu}(s)=0,m+1\leqslant\nu\leqslant n\}$$

因为 φ 是嵌入,所以 $\varphi:M\to\varphi(M)$是同胚,从而 $\varphi(U)$是 $\varphi(M)$关于子空间拓扑的开集,从而存在 q 的邻域 W,使

$$\varphi(U)=\varphi(M)\cap W$$

不妨设 $W\subset V$,于是

$$\varphi(M)\cap W=\varphi(U)=\{s\in W\mid y^{\nu}(s)=0,m+1\leqslant\nu\leqslant n\}$$

$\Leftarrow$ 假定(4.1)成立,应证 $\varphi^{-1}: \varphi(M)(\subset N)\to M$ 的连续。

对任意的 $p\in M$ 及 p 的邻域 U,由假设知存在 $q=\varphi(p)$的局部坐标系(V, y^{α}),使

$$\varphi(M)\cap V=\{s\in V \mid y^{\nu}(s)=0, m+1\leqslant \nu\leqslant n\} \qquad (*)$$

取

$$\tilde{V}=\{s\in V \mid |y^{\nu}(s)|<\delta\}\subset V,$$

其中 δ 为充分小的正数。由于 φ 连续,存在 p 的局部坐标系$(\tilde{U}, x^{i})$, $\tilde{U}\subset U$,使 $\varphi(\tilde{U})\subset\tilde{V}$ 且 $x^{i}(p)=0$,于是$\varphi|_{\tilde{U}}$可用局部坐标表为

$$\begin{cases} y^{i}=\varphi^{i}(x^{1},\cdots,x^{m}) & 1\leqslant i\leqslant m \\ y^{\nu}=0 & m+1\leqslant \nu\leqslant n \end{cases}$$

因为 φ 是浸入,故 *Jacobi* 行列式

$$\left.\frac{\partial(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})}{\partial(x^{1},\cdots,x^{m})}\right|_{x^{i}=0}\neq 0$$

由反函数定理,存在 $\delta_1<\delta$,使 $\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m}$ 有反函数

$$x^{i}=\psi^{i}(y^{1},\cdots,y^{m}) \qquad |y^{i}|<\delta_1 \tag{4.2}$$

令 $V_1=\{s\in\tilde{V} \mid |y^{\nu}(s)|<\delta_1\}$

则 $q\in V_1\subset\tilde{V}$。由$(*)$式

$$\begin{aligned}\varphi(M)\cap V_1 &= V_1\cap\{s\in V \mid y^{\nu}(s)=0, m+1\leqslant\nu\leqslant n\} \\ &=\{s\in V_1 \mid y^{\nu}(s)=0, m+1\leqslant\nu\leqslant n\}\end{aligned}$$

应证 $\varphi^{-1}(\varphi(M)\cap V_1)\subset\tilde{U}\subset U$,设 $x\in M$ 且 $\varphi(x)\in\varphi(M)\cap V_1$,故

$$|y^{i}(\varphi(x))|<\delta_1, y^{\nu}(\varphi(x))=0$$

由(4.2),存在 $\tilde{x}\in\tilde{U}$,使

$$\tilde{x}^{i}=\psi^{i}(y^{1}(\varphi(x)),\cdots,y^{m}(\varphi(x)))$$

从而 $\quad \varphi^{i}(\tilde{x}^{1},\cdots,\tilde{x}^{m})=y^{i}(\varphi(x))$

又因 $\quad \varphi(\tilde{U})\subset\tilde{V}$,有 $y^{\nu}(\varphi(\tilde{x}))=0$

故 $\quad \varphi(\tilde{x})=\varphi(x)$,由 φ 单一,知 $x=\tilde{x}\in\tilde{U}$,证毕。

以下介绍欧氏空间中浸入子流形的例子。

例4　$f^1,\cdots,f^n$ 为定义在 R^m 中区域 D 上的 $m(<n)$元函数组，如果

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^m} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

处处满秩，则 $f=(f^1,\cdots,f^n):D\to R^n$定义了一个浸入。

证明　设 f 的局部表示为

$$\begin{cases} y^1=f^1(x^1,\cdots,x^m) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y^n=f^n(x^1,\cdots,x^m) \end{cases}$$

$rank(f)=rank(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i})=m$，由定义 2，$f$ 为浸入。

例5　设 $F^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,F^k(x^1,\cdots,x^n)$为定义在 R^n 的区域 $W\subset R^n$ 上的光滑函数，$k<n$，且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{p\in W}$$

满秩，则方程组

$$\begin{cases} F^1(x^1,\cdots,x^n)=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ F^k(x^1,\cdots,x^n)=0 \end{cases}$$

确定了一个 $n-k$ 维局部浸入子流形。

证明　不妨设$\left.\frac{\partial(F^1,\cdots,F^k)}{\partial(x^1,\cdots,x^k)}\right|_{p\in W}\neq 0$。由隐函数定理，存在点 P 的邻域 $V\subset W$ 上一组函数

$$x^1 = f^1(x^{k+1}, \cdots, x^n)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x^k = f^k(x^{k+1}, \cdots, x^n)$$

于是

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t^{k+1}, \cdots, t^n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x^k = f^k(t^{k+1}, \cdots, t^n) \\ x^{k+1} = t^{k+1} \\ \cdots \quad \cdots \\ x^n = t^n \end{cases}$$

且 $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\nu} \quad I_{n-k}\right)$ 满秩 $(1 \leqslant i \leqslant k, k+1 \leqslant \nu \leqslant n)$，上述映射确定了一个 $n-k$ 维浸入子流形。

例6 令 $G = \{(x^1, \cdots, x^n) \mid F^i(x^1, \cdots, x^n) = 0, i = 1, \cdots, k\}$，$\left(\frac{\partial F^i}{\partial X^\alpha}\right)_{k \times n}\Bigg|_{p \in G}$ 满秩，则 G 为 R^n 中闭集，且对每点 $p \in G$，存在 p 在 R^n 中的坐标域 (V, y^α) 及 $U \subset G$，使 $G \cap U = \{s \in V \mid y^\nu(s) = 0, n-k \leqslant \nu \leqslant n\}$。

证明 $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^\alpha}\right)_{k \times n}$ 满秩，不妨设

$$\left.\frac{\partial(F^1, \cdots, F^k)}{\partial(x^{n-k+1}, \cdots, x^n)}\right|_p \neq 0$$

令

$$
\begin{cases}
y^1 = x^1 \\
\cdots \quad \cdots \\
y^{n-k} = x^{n-k} \\
y^{n-k+1} = F^1(x^1,\cdots,x^{n-k},x^{n-k+1},\cdots,x^n) \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
y^n = F^k(x^1,\cdots,x^{n-k},x^{n-k+1},\cdots,x^n)
\end{cases} \qquad (*)
$$

由于 $\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|_p = \left|\begin{matrix} I_{n-k} & & * & \\ & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n-k+1}} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^{n-k+1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^n} \end{matrix}\right|_p$

$= \left.\frac{\partial(F^1,\cdots,F^k)}{\partial(x^{n-k+1},\cdots,x^n)}\right|_p \neq 0$，于是存在 p 的邻域(V,y^α)及 $U\subset G$，使 $G\cap U = \{s\in V \mid y^\nu(s)=0 \quad n-k+1\leqslant\nu\leqslant n\}$。

显然，例 6 推广到一般即为定理 2。

定理 5 设 M、N 分别是 m 维和 n 维光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，$rank(f)$处处为定数 r，则对每一 $q=f(m)$，原象 $f^{-1}(q)$是 M 的 $m-r$ 维闭的嵌入子流形。

证明 记 $A=f^{-1}(q)\neq\varnothing$，$f$ 连续，A 为闭集。由定理 2，对任意的 $p\in A$，存在 p 的局部坐标系(U,x^i)及 $q=f(p)$的坐标系(V,y^α)，使 $f(U)\subset V$，$x^i(p)=0$，$y^\alpha(q)=0$，且

$$
y^\alpha\circ f = x^\alpha \qquad 1\leqslant\alpha\leqslant r
$$
$$
y^\mu\circ f = 0 \qquad r+1\leqslant\mu\leqslant n
$$

这意味着 U 中只有前 r 个坐标为零的点在 f 下映射为 q，即

$$
A\cap U = \{(x^1,\cdots,x^m)\in U \mid x^1=\cdots=x^r=0\}
$$

由定理 4，A 是 M 的 $m-r$ 维闭的嵌入子流形。

例 7 椭球面 $A=\{(x^1,x^2,x^3) \mid \frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}+\frac{(x^3)^2}{c^2}-1=0\}$是

R^3 中嵌入子流形。

证明 令 $f(x^1,x^2,x^3)=\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}+\frac{(x^3)^2}{c^2}-1, f:R^3-R$ 是光滑映射,且 $rank(f)_{p\in A}=rank(\frac{2x^1}{a^2},\frac{2x^2}{b^2},\frac{2x^3}{c^2})=1$,于是由定理 5,$A=f^{-1}(0)$是 R^3 的 $3-1=2$ 维嵌入子流形。

例 8 U 是光滑流形 M 的开集,将 M 的光滑结构限制在 U 上,令 $\varphi=id:U\to M$,则(φ,U)为 M 的开子流形。令 $GL(n)=\{A(a_{ij})_{n\times n}\mid det\ A\neq 0\}$,$GL(n)$视作 R^{n^2} 的开子集,是 n^2 维开子流形。证明 $SL(n)=\{A\in GL(n)\mid det\ A=1\}$为 $GL(n)$的 n^2-1 维闭嵌入子流形。

证明 令 $f:GL(n)\to R$,使 $f(A)=det\ A-1,\forall A\in GL(n)$,则 $SL(n)=\{A\in GL(n)\mid f(A)=0\}=f^{-1}(0)$。因为 $f(A)=\sum\limits_{i,j}a_{ij}A^{ij}-1$,其中 A^{ij}为 a_{ij}的代数余子式(对某个 i),映射 f 的 *Jacobi* 矩阵为

$$Df=(\frac{\partial f}{\partial a_{11}}\quad\frac{\partial f}{\partial a_{12}}\quad\cdots\quad\frac{\partial f}{\partial a_{1n}}\quad\cdots\quad\cdots\quad\frac{\partial f}{\partial a_{n1}}\quad\frac{\partial f}{\partial a_{n2}}\quad\cdots\frac{\partial f}{\partial a_{nn}}),$$

$$\frac{\partial f(A)}{\partial a_{ik}}=\sum_j\frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{ik}}A^{ij}+\sum_j a_{ij}\frac{\partial A^{ij}}{\partial a_{ik}}=\sum_j\delta_{jk}A^{ij}=A^{ik}$$

其中 $\frac{\partial A^{ij}}{\partial a^{ik}}$由代数余子式定义看出其值为零。所以

$$Df=(A^{11}\quad A^{12}\quad\cdots\quad A^{1n}\quad\cdots\quad\cdots\quad A^{n1}\quad\cdots\quad A^{nn})$$

至少有(i,k)使 $A^{ik}\neq 0$,$rank\ Df=1$,所以 $SL(n)$为 $GL(n)$的 n^2-1 维闭子流形。

例 8 证明 $O(n)=\{A\in GL(n)\mid AA^T=E\}$为 $GL(n)$的$\frac{n(n-1)}{2}$维闭子流形。

证明 定义映射 $f:GL(n)\to GL(n)$,使 $f(A)=A^TA$, $A\in GL(n)$,f 为光滑映射,且 $f^{-1}(E)=O(n)$,以下计算 $f_{*A}:T_AGL(n)\to T_{f(A)}GL(n)$ 的秩。

(1) f_{*A}的秩 $= f_{*E}$的秩。事实上,令

$$L_B: GL(n) \to GL(n), L_B(A) = BA, \forall A \in GL(n)。$$

$$R_B: GL(n) \to GL(n), R_B(A) = AB, \forall A \in GL(n)。$$

则$(L_B)^{-1} = L_{B^{-1}}, (R_B)^{-1} = R_{B^{-1}}, L_B$、$R_B$ 可微同胚。

注意到$(AB)^T(AB) = B^T(A^TA)B$,所以 $f \circ R_B = L_{B^T}R_B \circ f$,且

$$f_{*B}(R_B)_{*E} = (L_{B^T})_{*B} \circ (R_B)_{*E} \circ f_{*E}$$

由$(R_B)_{*E}$、$(L_{B^T})_{*B}$、$(R_B)_{*E}$满秩 $\Rightarrow$ $f_{*B} = f_{*E}$。

(2) f_{*E}的秩 $= \frac{n(n-1)}{2}$。事实上,$f(E) = E$,E 为 f 的不动点。

$f_{*E}: T_EGL(n) \to T_EGL(n)$, 且

$$f_{*E}\left(\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right) = \frac{(f(A))_{kl}}{\partial a_{ij}}\bigg|_E \frac{\partial}{\partial a_{kl}}, \quad (f(A))_{kl} = (A^TA)_{kl} = \sum_m a_{mk}a_{ml},$$

$$\frac{(f(A))_{kl}}{\partial a_{ij}} = \sum_m \frac{\partial a_{mk}}{\partial a_{ij}}a_{ml} + \sum_m a_{mk}\frac{\partial a_{ml}}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{ij}}a_{il} + a_{ik}\frac{\partial a_{il}}{\partial a_{ij}}$$

$= \delta_{kj}a_{il} + a_{ik}\delta_{lj}$,于是

$$f_{*E}\left(\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right) = (\delta_{kj}a_{il} + a_{ik}\delta_{lj})\bigg|_E \frac{\partial}{\partial a_{kl}} = a_{il}\bigg|_E \frac{\partial}{\partial a_{jl}} + a_{ik}\bigg|_E \frac{\partial}{\partial a_{kj}}$$

$$= a_{ik}\bigg|_E \left(\frac{\partial}{\partial a_{jk}} + \frac{\partial}{\partial a_{kj}}\right) = \delta_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial a_{jk}} + \frac{\partial}{\partial a_{kj}}\right) = \frac{\partial}{\partial a_{ji}} + \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

于是,对任意的 $C_{ij}\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \in T_E(GL(n))$,有

$$f_{*E}\left(C_{ij}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right) = C_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial a_{ji}} + \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right) = (C_{ij} + C_{ji})\frac{\partial}{\partial a_{ij}},$$

$$ker\, f_{*E} = \left\{C_{ij}\frac{\partial}{\partial a_{ji}}\,\middle|\, C_{ij} + C_{ji} = 0\right\} = \{(C_{ij}) \mid C_{ij} + C_{ji} = 0\}$$

$dim\ (ker\, f_{*E}) = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$,由维数定理,

$dim(f_{*E}(T_EGL(n))) = dim(T_EGL(n)) - dim(ker\, f_{*E}) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$rank\, f_{*A} = rank\, f_{*E} = \dfrac{n(n+1)}{2}$，$f(A) = E$ 确定了一个 $n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$维 $GL(n)$的闭子流形。

习　题

1. 设(M_i, D_i)是 C^r流形$(i=1,2,3)$，$F_1: M_1 \to M_2$，$F_2: M_2 \to M_3$都是 C^k 映射$(r \geqslant k \geqslant 1)$，$p_3 = F_2(p_2)$，$p_2 = F_1(p_1)$

(1^0)证明：$F_2 \circ F_1: M_1 \to M_3$ 也是 C^k 映射。

(2^0)证明：$rank(F_2 \circ F_1)p_1 \leqslant min\{(rankF_1)p_1, (rankF_2)p_2\}$。

(3^0)举出例子，使 $rankF_1 \neq 0$，$rankF_2 \neq 0$，但 $rank(F_2 \circ F_1) = 0$

(4^0)证明：两个浸入的复合还是浸入；两个嵌入的复合还是嵌入，两个微分同胚的复合还是微分同胚。

2*. 设在拓扑流形 M 上，由 D'_1 和 D'_2 分别确定了两个 C^r 的微分构造 D_1 和 D_2，证明：$D_1 = D_2 \iff$ 恒等映射 $I: M \to M$ 是从(M, D_1)到(M, D_2)的 C^r 微分同胚。

3. 在 $M = R^1$ 上构造两个不同的 C^∞ 微分构造，并使所得的微分流形是微分同胚。

注：同一拓扑流形是否有不同的微分构造的正确提法是，同一拓扑流形是否有不同的微分构造，得到的流形不是微分同胚的。

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^{2r+1} sin\, \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

证明：$F: R^1 \to R^2$，$F(x) = (x, f(x))$是 C^r 浸入，但不是 C^{r+1} 映射。

5. 设 $F: S^1 \to R^2$，$F(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = \left(\dfrac{cos\theta}{1+sin^2\theta}, \dfrac{-sin\theta cos\theta}{1+sin^2\theta}\right)$

则 $F(S^1)$为双纽线：$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$，且 F 是浸入。

6. $C^k(k\geqslant 1)$浸入是否是整体的一一映射？整体一一浸入是否是嵌入？举例说明。

7. 证明柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$和椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$都是 R^2 中的 C^∞ 正则子流形。

8. 证明 $GL(n,R)$可视作 R^{n^2} 中的开子流形。

9. 设 W 是 n 维 C^r 流形$(r\geqslant 1)$，$M\subset W$，且对任何 $p\in M$，存在 p 的坐标邻域 U 及局部坐标系$\{x^j\}$使得

$$M\cup U=\{q\in U|\varphi_i(q)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n-m\}$$

其中 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-m}$是 C^r 函数，且 $rank\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^j}\right)_U=n-m$，则 M 是 W 的 m 维 C^r 正则子流形。

10. 证明

$$M=\left\{(x,f(x))\,|\,f(x)=\begin{cases}x^{2r+1}sin\,\frac{1}{x},x\neq 0\\ 0\qquad\qquad\quad ,x=0\end{cases}\right\}$$是 R^2 的 C^r 正则子流形，但非 C^{r+1} 正则子流形。

11. 证明 $M=\{(x,f(x))\,|\,f(x)=|x|\}$不能成为 R^2 的 $C^r(r\geqslant 1)$子流形。

12. (1) 设 $x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$关于 $x^1,\cdots,x^n$ 有 r 阶连续偏导数。证明超曲面

$$x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$$

是 R^{n+1}的 n 维 C^r 正则子流形，具体给出此超曲面的形如定理 2 中所述的特殊坐标系。

(2) 证明通常的环面

$(x,y,z)=((b+acos\theta)cos\varphi,(b+acos\theta)sin\varphi,asin\varphi)$ $(0<a<b)$是 R^3 中的 2 维 C^∞ 正则子流形。

§ 4　单位分解定理

4.1　局部紧致的拓扑空间

定义 1　拓扑空间 M 称为局部紧致的，如果任意 $p\in M$，存在 p 的闭包紧致的邻域 $U(p)$。

在讨论局部紧空间的性质之前，先证明紧致 Hausdorff 空间的两个性质。

定理 1　设 M 是紧致的 Hausdorff 空间，则 M 是正则的。

证明　任意 $p\in M$ 及任意不含 p 的闭集 $A\subset M$，任取 $a\in A$，因为 M 是 Hausdorff 的，所以存在 a 的邻域 $Z(a)$，使 $p\in\overline{Z(a)}$，因为 $\{Z(a)\mid a\in A\}\cup\{M\setminus A\}$ 是 M 的一个开覆盖，M 紧致，所以上述覆盖有有限子覆盖 $\{Z_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}\cup\{M\setminus A\}$，从而

$$W=\bigcup_{i=1}^{m}Z_i$$

是包含 A 的一个开集，且 $p\in\overline{\bigcup_{i=1}^{m}Z_i}=\overline{W}$，于是存在 p 的邻域 $U(p)$ 使 $U(p)\cap W=\varnothing$。

定理 2　设 M 是紧致的 *Hausdorff* 空间，则对任意 p 及 p 的邻域 $U(p)$，存在 p 的邻域 V，使 $p\in V\subset\overline{V}\subset U(p)$，且 $\overline{V}$ 紧致。

证明　对任意 p 及 p 的邻域 $U(p)$，由假设及定理 1 知 M 是正则的，再由第二章 §5 定理 7 便知存在 p 的邻域 V，使

$$p\in V\subset\overline{V}\subset U(p)$$

由 M 紧致，从而闭子集 $\overline{V}$ 紧致(第二章 §7 定理 1)。

定理 2 的结论对局部紧的情形是成立的。

定理 3　设 M 是局部紧致的 Hausdorff 空间，则对任意 $p\in M$ 及任意 p 的邻域 $U(p)$，存在 p 的邻域 V，使 $p\in V\subset\overline{V}\subset U(p)$，$\overline{V}$ 紧致。

证明 对任意 $p\in M$ 及 p 的邻域 $U(p)$。由 M 局部紧致，存在 p 的邻域 W，$\overline{W}$ 紧致，$U(p)\cap\overline{W}$ 是 p 在紧致 *Hausdorff* 空间 $\overline{W}$（作为 M 的子空间）的一个邻域，由定理 2，存在 p 在 $\overline{W}$ 中的邻域 G，使 $p\in G\subset\overline{G}_{\overline{W}}\subset U(p)\cap\overline{W}$，命 $G=E\cap\overline{W}$，其中 E 为 M 的开集，再令 $V=E\cap W$，则 V 为 p 在 M 中的一个邻域且 $\overline{V}=\overline{E\cap W}=\overline{(E\cap\overline{W})\cap W}\subset\overline{E\cap\overline{W})}\cap\overline{W}=\overline{G}\cap\overline{W}=\overline{G}_{\overline{W}}\subset U(p)$。因 $\overline{V}\subset\overline{W}$ 且 $\overline{W}$ 紧致，所以 $\overline{V}$ 紧致。

定理 4 设 M 是局部紧致且满足第二可数公理的拓扑空间，则存在可数个紧子集 $\{K_n\}$，使 $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}$ 是它们构成 M 的覆盖。

证明 由 M 局部紧，对任意 $p\in M$，存在 p 的邻域 U_p，$\overline{U}_p$ 紧致，$\{U_p|p\in M\}$ 为 M 的开覆盖，M 满足第二可数公理，由 *Lindelöf* 定理，上述开覆盖有可数子覆盖 $\{U_i|1\leqslant i\leqslant\infty\}$ 命

$$K_1=\overline{U}_1$$

由于 $K_1\cup\overline{U}_2$ 紧致，所以存在正整数 m_1，使 $K_1\cup\overline{U}_2\subset\bigcup_{i=1}^{m_1}U_i$，令

$$K_2=\bigcup_{i=1}^{m_1}\overline{U}_i$$

则 $K_1\subset\mathring{K}_2$，重复上述步骤，可得紧子集族 $\{K_n\}$，每个 K_n 是紧致的且 $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}$，由于 $K_n\supset U_n$，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n=M$。

定义 2 子集族 $\sum_0$ 称为局部有限的，如果 M 的任意一个紧子集仅与 $\sum_0$ 的有限个成员相交。

定义 3 $\sum_1,\sum_2$，是两个 M 的覆盖，如果任意 $U\in\sum_1$，必存在 $V\in\sum_2$，使 $U\subset V$，则称 $\sum_1$ 是 $\sum_2$ 的加细覆盖。

定理 5 设 M 是局部紧致且满足第二可数公理拓扑空间，则 M 的任意一个开覆盖 $\{U_\alpha|\alpha\in I\}$ 必有一个可数、局部有限的加细开覆盖 $\{V_i|1\leqslant i\leqslant\infty\}$ 且 $\overline{V}_i$ 紧致。

证明　由假设条件及定理 4,存在$\{K_i|1\leqslant i\leqslant\infty\}$覆盖 M 且每个 K_i 紧致,$K_i\subset\mathring{K}_{i+1}$令

$$E_i=K_i-\mathring{K}_{i-1}$$

由于 $E_i\subset K_{i+1}$,K_{i+1}紧致,所以闭集 E_i 是紧致的,再令

$$W_i=\mathring{K}_{i+1}-K_{i-2}。$$

M 的开覆盖$\{U_\alpha|\alpha\in I\}$必有有限多个成员 $U_{i1},\cdots,U_{im_i}$覆盖 E_i。令

$$V_{ij}=U_{ij}\cap W_i\qquad 1\leqslant j\leqslant m_i$$

则$\{V_{ij}|1\leqslant j\leqslant m_i\}$为 E_i 的开覆盖。由 $M=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}K_i=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}E_i$,所以$\sum_0=\{V_{ij}|1\leqslant i\leqslant\infty,1\leqslant j\leqslant m_i\}$是 M 的可数开覆盖且为$\sum$的加细。

再证$\sum_0$是局部有限的。设 A 为 M 的任一紧子集,$\sum_0$中有有限个成员覆盖 A,设这有限个成员中指标 i 的最大值为 s,则有 $V_{ij}\subset\mathring{K}_{i+1}\subset\mathring{K}_{s+1}(i\leqslant s)$,　$t>s+3$ 时,$V_{tj}\cap\mathring{K}_{s+1}=\varnothing$ 与 A 相交的至多是 $V_{ij}(1\leqslant i\leqslant s+2,1\leqslant j\leqslant m_i)$,即$\sum_0$是局部有限的。

显然 $\overline{V}_{ij}$紧致(因为它含在紧子集 K_{i+2}中)。

4.2　单位分解定理

引理 1　设 $B(r_1)$,$B(r_2)$,是 R^n 中以原点为中心的两个同心球且 $r_1<r_2$,则存在函数 $F\in C^\infty(R^n)$,使

$$F|_{B(r_1)}\equiv 1,F|_{R^n\setminus B(r_2)}\equiv 0,$$

证明　先考虑一元函数 $g:R\to R$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{(x-r_1^2)(x-r_2^2)}}, & r_1^2<x<r_2^2,\\ \\ 0, & x\leqslant r_1^2\text{ 或 }x\geqslant r_2^2,\end{cases}$$

容易验证 $g(x)$是光滑的,再令

$$G(x)=\frac{\int_x^{\infty} g(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx},$$

则 $G(x)$光滑且

$$G(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant r_1^2,\\ 0 & x\geqslant r_2^2,\end{cases}$$

命

$$F(x^1,\cdots,x^n)=G((x^1)^2+\cdots+(x^n)^2)$$

则 F 为所求。

引理 2 设 U,V 为光滑流形 M 的二开子集，$\overline{U}$ 紧致 $\overline{U}\cap\overline{V}=\Phi$，则有函数 $f\in C^{\infty}(M)$，使得 $f|_{U}\equiv 1, f|_{V}\equiv 0$

证明 由于 $\overline{U}\cap\overline{V}=\Phi$，所以 $\overline{U}\subset M\setminus\overline{V}$(开集)，对任意点 $p\in\overline{U}$ 必有 p 的坐标邻域 $Z_p\subset M\setminus\overline{V}$，存在开集 U_p, W_p 使

$$p\in U_p\subset\overline{U_p}\subset W_p\subset\overline{W_p}\subset Z_p。$$

(Z_p,φ_p)为坐标卡，不妨假设 $\varphi_p(U_p)$和 $\varphi_p(W_p)$是 R^n 中以原点为中心的同心球域，由于$\overline{\varphi_p(U_p)}\subset\varphi_p(W_p)$，由引理 2，存在函数 $F_p\in C^{\infty}(R^n)$使

$$F_p|_{\varphi_p(U_p)}\equiv 1,\quad F_p|_{R^n\setminus\varphi_p(W_p)}\equiv 0。$$

令

$$f_p(x)=\begin{cases}F_p(\varphi_p(x)), & x\in Z_p,\\ 0, & x\overline{\in} Z_p,\end{cases}$$

则 $f_p(x)$是光滑的且

$$f_p(x)=\begin{cases}1, & x\in U_p,\\ 0, & x\overline{\in} W_p。\end{cases}$$

显然上述的开集族$\{U_p \mid p\in \overline{U}\}$覆盖紧子集$\overline{U}$,可取到有限子覆盖$\{U_i:1\leqslant i\leqslant r\}$且对应光滑函数族$\{f_i\in C^\infty(M)\mid 1\leqslant i\leqslant r\}$,其中

$$f_i(x)=\begin{cases}1, & x\in U_i,\\ 0, & x\overline{\in} W_i,\end{cases}$$

$\overline{U_i}\subset W_i$。令

$$f=1-(1-f_1)(1-f_2)\cdots(1-f_r),$$

则任意$x\in U$,存在i,$x\in U_i$,从而$f(x)=1$,任意$x\in V$,必有$x\in M\setminus W_i$,从而$f(x)=0$。

定理 6 设U是光滑流形M的一个开子集,$f\in C^\infty(U)$,则在点$p\in U$,必存在p的邻域$V\subset U$及光滑函数$\tilde{f}\in C^\infty(M)$使

$$\tilde{f}\mid_V=f\mid_V。$$

证明 $p\in U$,由M局部欧氏,因此是局部紧致的,于是存在p的邻域V,W,$\overline{V}$紧致使得$p\in V\subset\overline{V}\subset W\subset\overline{W}\subset U$,$\overline{V}\cap(M\setminus W)=\Phi$,由引理 2,存在函数$g\in C^\infty(M)$,使$g\mid_V\equiv 1$,$g\mid_{M\setminus\overline{W}}\equiv 0$,令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}g(x)f(x), & x\in U,\\ 0, & x\overline{\in} U。\end{cases}$$

则$\tilde{f}(x)$为M上的光滑函数且满足$\tilde{f}\mid_V=f\mid_V$

定理 7 **(单位分解定理)**设M是满足第二可数公理的n维光滑流形,$\sum=\{U_\alpha\mid\alpha\in I\}$是$M$的任意一个开覆盖,则$\sum$必有一个可数的,局部有限加细覆盖$\sum_{。}=\{V_i\mid 0\leqslant i\leqslant\infty\}$以及定义在$M$上的光滑函数族$\{f_i\in C^\infty(M)\mid 1\leqslant i\leqslant\infty\}$使

(Ⅰ)　$0\leqslant f_i\leqslant 1$

(Ⅱ)　$\mathrm{supp}f_i\subset V_i$

(Ⅲ)　$\mathrm{supp}f_i$ 紧致

(Ⅳ)　$\sum_{i=1}^{\infty}f_i=1$

其中 $suppf_i=\overline{\{x\in M\mid f_i(x)\neq 0\}}$，称为函数 f_i 的支撑集（它的余集 $M\setminus suppf_i$ 是使 $f_i=0$ 的最大开集）。

证明 由于 M 是满足第二可数公理的 n 维光滑流形，因此 M 是局部紧致的。由定理 5，开覆盖 $\sum$ 有可数的，局部有限的加细覆盖 $\sum=\{V_i\mid 1\leqslant i\leqslant\infty\}$ 且每个 $\overline{V_i}$ 是紧致的。

下面将证明存在开覆盖 $\sum_0'=\{W_i\mid 1\leqslant i\leqslant\infty\}$ 使 $\overline{W_i}\subset V_i$，事实上，

由于

$$M\setminus\bigcup_{i=2}^{\infty}V_i\subset V_1\subset\overline{V_1}。$$

又由于 $\overline{V_1}$ 紧致，从而闭集 $M\setminus\bigcup_{i=2}^{\infty}V_i$ 是紧致的，对每点 $p\in M\setminus\bigcup_{i=2}^{\infty}V_i$，取 p 的邻域 Z_p，使 $p\in Z_p\subset\overline{Z_p}\subset V_1$ 且 $\overline{Z_p}$ 紧致，$\{Z_p\mid p\in M\setminus\bigcup_{i=2}^{\infty}V_i\}$ 构成 $M\setminus\bigcup_{i=2}^{\infty}V_i$ 的开覆盖，取其有限子覆盖 $\{Z_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 命

$$W_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}Z_i,$$

则有 $\overline{W_1}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{Z_i}\subset V_1$ 且 $\{W_1,V_2,V_3,\cdots\}$ 覆盖 M，可归纳地得出 $\sum_0'$ 如下：

设对自然数 r，存在开集 W_i，$1\leqslant i\leqslant r$，使 $\overline{W_i}\subset V_i$ 且 $\{W_1,\cdots,W_r,V_{r+1},\cdots\}$ 覆盖 M，则

$$M\setminus((\bigcup_{i=1}^{r}W_i\cup(\bigcup_{i=r+2}^{\infty}V_i))\subset V_{r+1}\subset\overline{U_{r+1}}。$$

仿照 W_i 的构造可得开集 W_{r+1}，使 $\overline{W_{r+1}}\subset V_{r+1}$ 且 $\{W_1,\cdots,W_{r+1},V_{r+2},\cdots\}$ 覆盖 M。根据归纳法原理，存在 M 的一个开覆盖 $\{W_i\}$，使 $\overline{W_i}\subset V_i$。

由 $W_i\cap(M\setminus V_i)=\emptyset$，$\overline{W_i}$ 紧致，由引理 2，存在 $\tilde{f}_i\in C^\infty(M)$ 使

$$\tilde{f}_i|_{W_i}\equiv 1,\quad \tilde{f}_i|_{M\setminus V_i}\equiv 0,$$

于是 $supp\tilde{f}_i\subset V_i$(严格说来,还应对$\{W_i\}$收缩一次,由于推理是重复上述过程的,我们略去)。由于$\{V_i\}$局部有限,任意 $p\in M$,p 至多属于有限个 V_i,从而只有有限个 $\tilde{f}_i(p)\neq 0$,$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i$ 在每点 p 有限项和,因而其值是确定的,另外,每点 $p\in M$,至少有一个 W_i,使 $p\in W_i$,$\tilde{f}_i(p)=1$,所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i(p)>1$,于是可令

$$f_i=\frac{\tilde{f}_i}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i},$$

则 f_i 满足(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)、和(Ⅳ)

以后,我们称函数族$\{f_i|1\leqslant i\leqslant\infty\}$为属于$\Sigma$的单位分解,因为 $suppf_i\subset$某个 $U_\alpha\in\Sigma$。

定理 8 设 M 是 m 维紧致光滑流形,则存在正整数 n 及光滑映射 $\varphi:M\to R^n$,使得(φ,M)成为 R^n 的嵌入子流形。

证明 因为 M 是紧致的光滑流形,故存在有限多个局部坐标系$(U_\lambda;x_\lambda^i)$,$1\leqslant\lambda\leqslant r$,以及开集 V_λ,W_λ,使得每一个$\overline{V_\lambda}$是紧致的且 $\overline{V_\lambda}\subset W_\lambda\subset\overline{W_\lambda}\subset U_\lambda$,并且$\{V_\lambda|1\leqslant\lambda\leqslant r\}$构成$M$ 的开覆盖。

由引理 存在光滑函数 $f_\lambda\in C^\infty(M)$,使得

$$f_\lambda|_{V_\lambda}\equiv 1,\quad f_\lambda|_{M\setminus W_\lambda}\equiv 0,$$

于是可以构造 $n=r(m+1)$个 M 上的光滑函数

$$y_\lambda=f_\lambda,$$

$$y_\lambda^i(p)=\begin{cases}x_\lambda^i(p)\cdot f_\lambda(p), & p\in U_\lambda,\\ 0, & p\overline{\in} U_\lambda。\end{cases}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant m$,$1\leqslant\lambda\leqslant r$,它们给出了从 M 到 R^n 的光滑映射 φ。

再证 φ 是一一的,设 $p,q\in M$,且 $\varphi(p)=\varphi(q)$,则有

$$y_\lambda(p)=y_\lambda(q),y_\lambda^i(p)=y_\lambda^i(q),\forall i,\lambda。$$

因为$\{V_\lambda \mid 1\leqslant\lambda\leqslant r\}$是$M$的复盖，不妨设$p\in V_a$，故

$$f_a(p)=y_a(p)=y_a(q)=f_a(q)=1,$$

于是q必属于U_a(因为$suppf_a\subset U_a$)，又有

$$x_a^i(q)=y_a^i(q)=y_a^i(p)=x_a^i(p),$$

故p,q在U_a内有相同的坐标，因此$p=q$。

再证φ是浸入。 $p\in V_a$时，$y_a^i(p)=x_a^i(p)$，所以在V_a内有

$$\frac{\partial(y_n^1,\cdots,y_n^m)}{\partial(x_a^1,\cdots,x_a^m)}=1,$$

因此$rank(\varphi)=m$，即$\varphi:M\to R^n$是浸入。

最后，由于$\varphi:M\to\varphi(M)$是一一到上的连续映射，M是紧致的Hausdorff空间，由第二章§7定理8知φ是同胚。

综上述，$\varphi:M\to R^n$是嵌入。

第四章　切向量场

§1　光滑向量场

定义 1　光滑流形 M 上的一个切向量场(或向量场)X 是指在 M 的每点 p 处指定一个切向量 X_p，令

$$TM=\bigcup_{p\in M}T_pM$$

那么，映射 $X:M\longrightarrow TM(p\to X_p\in T_pM)$ 称为 M 上的一个切向量场。

定义 2　向量场 X 称为 C^r 的，如果对 $\forall\, x_0\in M$，存在 x_0 的局部坐标系 (U,x^i)，使当 X 有局部表示

$$X|_U=\sum_{i=1}^{m}\zeta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

时，分量 ζ^i 在 x_0 是 C^r 的。

$\mathscr{X}(M)$ 记 M 上光滑向量场的全体构成的集合，定义 $\mathscr{X}(M)$ 中的加法和数乘法如下：$X,Y\in\mathscr{X}(M)$

$$(X+Y)(p)=X(p)+Y(p),\qquad \forall\, p\in M$$
$$(\lambda X)(p)=\lambda X(p)\quad ,\qquad \forall\,\lambda\in R$$

易证 $\mathscr{X}(M)$ 是实矢量空间。

设 $f\in C^\infty(M)$，定义 $X(f):M\to R$ 使

$$X(f)(p)=X_pf,\quad \forall\, p\in M$$

局部上，有

$$X(f)(p)=\sum_{i=1}^{m}\zeta^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p(f)=\sum_{i=1}^{m}\zeta^i(p)\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}$$

其中 $p\in U$,(U,φ)为坐标卡,局部坐标系为(U,x^i),由此看出 $X(f)\in C^\infty(M)$,所以 X 是 $C^\infty(M)$到 $C^\infty(M)$的映射。

定理 1 设 M 是光滑流形,$X\in\mathscr{X}(M)$,定义映射 $X:C^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(M)$

使对 $\forall f\in C^\infty(M)$,$(Xf)(p)=X_pf$,那么 X 满足

(1) $\forall f,g\in C^\infty(M)$,$X(f+g)=X(f)+X(g)$,

(2) $\forall f\in C^\infty(M)$,$\lambda\in R$,$X(\lambda f)=\lambda X(f)$,

(3) $\forall f,g\in C^\infty(M)$,$X(fg)=fX(g)+gX(f)$。

反之,若映射 $\alpha:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$满足(1),(2),(3),则必为 M 上向量场。

证明 设 $X\in\mathscr{X}(M)$,由 Xf 的定义知道,对 $\forall f,g\in C^\infty(M)$,$\forall p\in M$

$$X(f+g)(p)=X_p(f+g)=X_pf+X_pg$$
$$=(Xf)(p)+(Xg)(p)=(Xf+Xg)(p),$$

从而 $X(f+g)=Xf+Xg$,同理可证(2),(3)成立。

反之,设 $\alpha:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$为满足(1),(2)和(3)的映射,对 $\forall p\in M$,$\forall f\in C_p^\infty$,存在 p 的邻域 U',f 在 U' 上光滑。由第三章§4定理6,存在 p 的邻域 $U\subset U'$ 及 $\tilde{f}\in C^\infty(M)$,使 $\tilde{f}|_U=f$,定义

$$\alpha_pf=\alpha(\tilde{f})(p)$$

我们要证明上述定义与 $\tilde{f}$ 的选取无关,而且 α_p 是 M 在 p 的一个切矢量。

事实上,若 $\tilde{g}\in C^\infty(M)$且存在含 p 的开集 V,使 $\tilde{g}|_V=f$,那么在 $W=U\cap V$ 上,有 $\tilde{f}|_W=\tilde{g}|_W$。由于 $p\in W$,M 局部紧致,存在 p 的邻域 G,使 $x_0\in G\subset\overline{G}\subset W$ 且 $\overline{G}$ 紧致。由第三章§4引理2,存在光滑函数 $h\in C^\infty(M)$,使

$$h|_G\equiv 1,\qquad h|_{M\setminus W}\equiv 0,$$

于是有$(\tilde{f}-\tilde{g})h\in C^{\infty}(M)$且

$$(\tilde{f}-\tilde{g})h\equiv 0。$$

注意到 α 满足(1)，$\alpha(0)=\alpha(0+0)=\alpha(0)+\alpha(0)=2\alpha(0)$，所以 $\alpha(0)=0$，从而由条件(3)

$$0=\alpha((\tilde{f}-\tilde{g})h)=(\tilde{f}-\tilde{g})\alpha(h)+h\alpha(\tilde{f}-\tilde{g})$$

由此推出

$$\alpha(\tilde{f})|_G=\alpha(\tilde{g})|_G$$

特别地

$$\alpha(\tilde{f})(p)=\alpha(\tilde{g})(p)$$

这就证明了 $\alpha_p f$ 的定义与 $\tilde{f}$ 的选取无关，从而 α_p 是 C_p^{∞} 到 R 的映射。

再证 α_p 是切向量。$\forall f_1,f_2\in C_p^{\infty}$，取函数 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2\in C^{\infty}(M)$，使在 p 的邻域上分别与 f_1,f_2 相等，那么

$$\begin{aligned}\alpha_p(f_1+f_2)&=\alpha(\tilde{f}_1+\tilde{f}_2)(p)=(\alpha\tilde{f}_1)(p)+(\alpha\tilde{f}_2)(p)\\&=\alpha_p f_1+\alpha_p f_2。\end{aligned}$$

同理可验 α_p 满足切向量定义中的其余两个条件，综上述，映射 α 在每点 $p\in M$ 指定了一个切矢量 α_p，因此是 M 上的向量场。

设(U,x^i)为 p 的一个局部坐标系，那么 $\forall x\in U$

$$\alpha_x=\alpha_x(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x$$

取函数 $f^i\in C^{\infty}(M)$使 f^i在 x 的一邻域上与 x^i 相等，那么

$$\alpha_x(x^i)=\alpha_x(f^i)=\alpha(f^i)(x)$$

由于函数 $\alpha(f^i)(x)$在 p 是光滑的，所以 $\alpha_x(x^i)$在 p 光滑，证毕。

设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，$X:C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)$，$Y:C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)$，于是有复合映射 $X\circ Y:C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)$，一般说来，$X\circ Y\notin\mathscr{X}(M)$，这是因为，对 $\forall f,g\in C^{\infty}(M)$，

$$X\circ Y(f\cdot g)=X(Y(f\cdot g))=X(f\cdot Y(g)+g\cdot Y(f))$$

$= X(f)\cdot Y(g) + f(X\circ Y)(g) + X(g)\cdot Y(f) + g\cdot(X\circ Y(f))$,

所以 $X\circ Y$ 一般说来不满足定理 1 中的条件(3),但容易看出

$$X\circ Y - Y\circ X \in \mathscr{X}(M)。$$

定义 3 设 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$,向量场$[X, Y] = X\circ Y - Y\circ X$ 称为 X 与 Y 的 *Poisson* 括号积。

定理 2 $\mathscr{X}(M)$中的 *Poisson* 括号积$[\,,\,]: \mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\longrightarrow\mathscr{X}(M)$满足以下运算律:

(1) 反交换律

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

(2) 分配律

$$\left.\begin{array}{l}[aX+bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]\\ [Z, aX+bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]\end{array}\right\}\text{双线性性;}$$

(3) *Jacobi* 恒等式

$$[X[Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0\ 。$$

其中 $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$, $a, b \in R$。

证明留作习题。

定义 4 设 V 为域 F 上的向量空间,如果 V 上定义了一个二元运算$[\,,\,]$具有双线性性,反交换性且满足 *Jacobi* 恒等式,则称$(V, [\,,\,])$为 F 上的一个 *Lie* 代数。

定理 2 指出$(\mathscr{X}(M), [\,,\,])$为 R 上的一个 *Lie* 代数。

定理 3 设 U 是光滑流形 M 的一个开子集,X 是 U 上光滑向量场,对$\forall p\in U$ 必有 p 的邻域 $V\subset U$ 以及 $\tilde{X}\in C^\infty(M)$,使

$$\tilde{X}|_V = X_V$$

证明 $p\in U$, M 局部紧致,因此存在 p 的邻域 V, W 使 $p\in V\subset\bar{V}\subset W\subset\bar{W}\subset U$ 且紧致,由于 $\bar{V}\cap(M-W) = \varnothing$

由第三章§4 引理 2,存在函数 $f\in C^\infty(M)$,使

$$f|_V \equiv 1,\quad f|_{M\setminus\bar{W}} \equiv 0$$

定义

$$\tilde{X}_q=\begin{cases}f(q)X_q & q\in U,\\ 0 & q\overline{\in} U。\end{cases}$$

由于 $M=U\bigcup(M\setminus\overline{W}),U\bigcap(M\setminus\overline{W})\neq\emptyset,\tilde{X}|_U=fX|_U$ 光滑且 $\tilde{X}|_{M\setminus\overline{W}}=0$ 也是光滑的，所以 $\tilde{X}$ 在 M 上光滑。

定理 4 设 $F:M\to N$ 是微分同胚，则切映射 $F_*:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(N)$ 是 *Lie* 代数同构。

证明 首先注意到，对 $\forall q\in N$，唯一存在 $p\in M$，使 $F(p)=q$（因为 F 是同胚），$\forall X\in\mathscr{X}(M)$，定义

$$(F_*X)_{q=F(p)}=F_*X_p,$$

由 p 的唯一性知上式右端是唯一确定的，又因为 $\forall q\in N$，对应的 p 存在，所以 F_*X 为定义在整个 N 上的向量场。

另一方面，$\forall X,Y\in\mathscr{X}(\mathrm{M}),\forall \mathrm{g}\in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{N})$，

$$\begin{aligned}&[F_*X,F_*Y]_{F(p)}(g)\\ =&(F_*X)_{F(p)}(F_*Y(g))-(F_*Y)_{F(p)}(F_*X(g))\\ =&X_p((F_*Y)(g)\circ F)-Y_p(F_*X(g)\circ F),\end{aligned}$$

因为对 $\forall x\in M$，

$$\begin{aligned}&((F_*Y)(g)\circ F)(x)=(F_*Y(g))(F(x))=(F_*Y)_{F(x)}g\\ =&F_*Y_x(g)=Y_x\,g\circ F=Y(g\circ F)(x),\end{aligned}$$

所以有

$$(F_*Y)(g)\circ F=Y(g\circ F),$$

从而

$$\begin{aligned}[F_*X,F_*Y]_{F(p)}g&=X_p(Y(g\circ F))-Y_p(X(g\circ F))\\ &=(X\circ Y-Y\circ X)_p(g\circ F)\\ &=[X,Y]_p(g\circ F)\\ &=(F_*[X,Y])_{F(p)}(g),\end{aligned}$$

此即 $[F_*X,F_*Y]_{F(p)}=F_*[X,Y]_p$。由 p 是任取的，就有 $[F_*X,F_*Y]=F_*[X,Y]$，又因为 F_* 是线性的，所以 $F_*:\mathscr{X}(M)\longrightarrow\mathscr{X}(M)$ 是 *Lie* 代数同构。

定义 5 设 M 是光滑流形，X 是 M 上一个连续向量场，若 $p\in M$，$X_p=0$，则称 p 为 X 的奇点。

流形上处处不为零的向量场的存在性与流形的拓扑性质有关。

例 1 奇数维球面 $S^{2n-1}\subset R^{2n}$ 上存在无奇点的切向量场。

证明 用 $\{x^i|1\leqslant i\leqslant 2n\}$ 记 R^{2n} 中笛卡尔坐标系，则单位球

$$S^{2n-1}=\{(x^1,\cdots,x^{2n})\in R^{2n}\mid\sum_{i=1}^{2n}(x^i)^2=1\},$$

每点 $p\in S^{2n-1}$ 处定义矢量

$$X(p)=(-x^2,x^1,x^3,\cdots,-x^{2n},x^{2n-1}),$$

由于 $X(p)\perp\overrightarrow{op}$，故 $X(p)$ 是 S^{2n-1} 在 p 的切矢量，$|X(p)|^2=1$ 说明向量场 X 无奇点。

下面证 X 是光滑的，取 S^{2n-1} 的微分结构

$D_0=\{(U_1^+,\varphi_1^+),(U_1^-,\varphi_1^-),\cdots,(U_{2n}^+,\varphi_{2n}^+),(U_{2n}^-,\varphi_{2n}^-)\}$

其中

$$U_i^+=\{(x^i,\cdots,x^{2n})\in S^{2n-1}|x_i>0)\},$$
$$U_i^-=\{(x^i,\cdots,x^{2n})\in S^{2n-1}|x_i<0)\},$$

$1\leqslant i\leqslant 2n$。

$$\varphi_i^+:U_i^+\to R^{2n-1}$$

使

$$\varphi_i^+(x^1,\cdots,x^{2n})=(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{2n})$$

$\hat{x}^i$ 表示去掉 x^i，我们证明 X 在 U_{2n}^+ 上光滑，其余情况可类似证明。

若用 $(u^1,\cdots,u^{2n-1})$ 记 R^{2n-1} 中点的笛卡尔坐标，则 U_{2n}^+ 的参数方程可表成

$$x^{\alpha}=u^{\alpha},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant 2n-1,$$

$$x^{2n}=\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^{2n-1}(u^{\alpha})^2}。$$

区域 U_{2n}^{+}上的自然基底$\left\{\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}\right\}$用$R^{2n}$中的自然基底$\frac{\partial}{\partial x^{i}}$表示为

$$\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}=\frac{\partial x^{i}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}-\frac{u^{\alpha}}{\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^{2n-1}(u^{\alpha})^2}}\frac{\partial}{\partial x^{2n}},$$

这里,将$\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$视为$R^{2n}$中向量,于是有

$$\begin{aligned}X&=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(-x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha-1}}+x^{2\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha}}\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(-u^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{2\alpha-1}}+u^{2\alpha-1}\frac{\partial}{\partial u^{2\alpha}}\right)-\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^{2n-1}(u^{\alpha})^2}\frac{\partial}{\partial u^{2n-1}},\end{aligned}$$

因为 X 是分量都是$u^1,\cdots,u^{2n-1}$的光滑函数,故 X 在U_{2n}^{+}上是光滑的。

例 2 n 维环面$T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}$,其中 S^1 为单位圆。

每点 $(a_1,\cdots,a_n)\in T^n$,其中 $a_i\in$ 第 i 个 S^1, $S^1\times\{(a_2,\cdots,a_n)\}$视为 T^n 的一曲线,定义 S^1 在 a_1 的切向量为该曲线在$(a_1,\cdots,a_n)$的一个切向量 $X_{(a_1,\cdots,a_n)}$,它也是 T^n在$(a_1,\cdots,a_n)$的一个切矢量,这样就给出了 T^n上一个切矢量场。由于 S^1 上显然存在无奇点向量场,从而 T^n上也存在无奇点光滑向量场,实际上,T^n上存在 n 个处处线性无关的光滑向量场。

例 3* 设 M 为紧致光滑流形,X 为 M 上只有孤立奇点的连续向量场,X 为 M 上只有孤立奇点的连续向量场,任意点 $p\in M$,记 ind_pX 为 X 在点 p 的指标,Hopf 定理指出 $\sum_{p\in M}ind_pX=\chi(M)$,其中

$\chi(M)$表示 M 的 Euler 示性数，因为偶数维球面 S^{2n}的 Euler 示性数 $\chi(S^{2n})=2$，所以 S^{2n}上必不存在无奇点的向量场。

§2 Frobenius 定理

定理 1 X 是 m 维光滑流形 M 的光滑向量场，若 $P\in M$，$X_p\neq 0$，则存在 p 的局部坐标系(V,y^i)使

$$X|_V=\frac{\partial}{\partial y^1}。$$

证明 取 p 的局部坐标系(U,x^i)使 $x^i(p)=0$，X 局部表示为

$$X_U=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$\xi^i\in C^\infty(U)$，设 $\xi^1(p)\neq 0$。对每点$(0,y^2,\cdots,y^m)\in U$，解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx^i}{dt}=\xi^i(x^1,\cdots,x^m),\\ x^1(0)=0,\quad x^\alpha(0)=y^\alpha,\quad 2\leqslant\alpha\leqslant m。\end{cases}$$

由常微分方程理论，对充分小的 ε 且$|t|<\varepsilon$ 时，其解

$$x^i=x^i(t,y^2,\cdots,y^m)$$

是 C^∞的。令 $y^1=t$，则

$$\left.\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\right|_{y=0}=\xi^i(y^1,\cdots,y^m)\Big|_{y=0}=\xi^i(p)$$

$$\left.\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial x^i(0,y^2,\cdots,y^m)}{\partial y^\alpha}\right|_{y^2=\cdots=y^m=0}=\delta^i_\alpha,2\leqslant\alpha\leqslant m,$$

因此，

$$\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}\right|_{y=0}=\begin{vmatrix}\xi^1(p) & 0 & 0\cdots 0\\ \xi^2(p) & 1 & 0\cdots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi^m(p) & 0 & 0\cdots 1\end{vmatrix}=\xi^1(p)\neq 0$$

从而存在 p 的邻域 $V\subset U$，在 V 上 $x^i=x^i(y^1,\cdots,y^m)$ 为坐标变换，且

$$\frac{\partial}{\partial y^1}=\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\ \frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial x^i}{\partial t}\ \frac{\partial}{\partial x^i}=\xi^i\ \frac{\partial}{\partial x^i}=X|_V。$$

定理 1 的几何意义是，如果 $X_p\neq 0$，则存在 p 的邻域上的坐标变换，使在该邻域内 X 为 y^1 – 坐标曲线的切向量。

以下考虑多个向量场的情形。

定义 1 设 M 是光滑流形，若在每点 $p\in M$，都指定一个 h 维切子空间 L_p^h，则称 L^h 为 M 上的 h 维分布。如果对每点 $p\in M$，存在 P 的邻域 U 及 U 上 h 个处处线性无关的光滑切向量场 $X_1,\cdots,X_h$，使得在每点 $q\in U$，L_q^h 由 $X_1(q),\cdots,X_h(q)$ 张成，即 $L_q^h=\{X_1(q),\cdots,X_n(q)\}$，则称 L^h 是 M 上光滑分布，记

$$L^h\Big|_U=span\{X_1,\cdots,X_h\}。$$

注：如果 M 上存在 h 个处处线性无关的向量场，则 M 上存在 h 维光滑分布 L^h。反之，M 上存在 h 维光滑分布 L^h，M 上不一定存在处处线性无关的 h 个向量场。例如，球面上的切空间场是光滑的 2 维分布，但球面上不存在两个处处线性无关的向量场。

定义 2 设 L^h 是 M 上的 h 维光滑分布，若单一浸入 $\varphi:N\to M$ 在 $\forall P\in N$ 使 $\varphi_*(T_pN)\subset L^h_{\varphi(p)}$，则称 (φ,N) 是 L^h 的一个积分流形。

例 1 L^h 为 M 上光滑分布，则 L^h 必有 1 维积分子流形。

证明 $\forall P\in M$，L^h 光滑，存在 p 的邻域 U 及 U 上处处线性无关的 h 个光滑向量场，使 $L^h|_U=span\{X_1,\cdots,X_h\}$，同此在 U 上，光滑向量场 $X_1|_U\neq 0$，由定理 1，存在 P 的局部坐系 (V,y^i)，$V\subset U$，使 $X_1|_V=\frac{\partial}{\partial g}$，$y^i(p)=0$。

令 N 为具有局部坐标 $y^i=t\delta_1^i(|t|<\varepsilon)$ 的曲线，对充分小的

ϵ,包含映射 $i: N \to U$ 为单一浸入,$i_*(T_pN) = \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p = X_1\Big|_p$,$N$ 为 L^h 的 1 维积分子流形。

当 $h \geqslant 2$ 时,对每点 $p \in M$,未必有 h 维积分子流形经过点 p。

以下讨论向量场完全可积的条件——Frobenius 定理。

定义 3 如果对每点 $p \in M$,都存在一个经过 p 的 h 维积分子流形,则称 L^h 在 M 上完全可积,即对每点 $p \in M$,都存在 p 的邻域 U 及单一浸入 $\varphi: N \to U$,对 $\forall q \in N$,都有 $\varphi_*(T_qN) = L^h_{\varphi(q)}$。

定理 2 设 L^h 是 M 上的 h 维光滑分布,若对每点 $p \in M$,都有 L^h 的过 p 的 h 维积分子流形(完全可积),则任给光滑向量场 X、$Y \in L^h$,都有 $[X, Y] \in L^h$。L^h 关于运算 $[\,,\,]$ 封闭,称为 L^h 满足 *Frobenius* 条件。

证明 设 X、$Y \in L^h$ 光滑,$\forall p \in M$,存在 p 的邻域 $U \subset M$ 及单一浸入 $\varphi: N \to U$,使得 $\varphi_*(T_qN) = L^h_{\varphi(q)}$,$\forall q \in N$。由于 φ_* 处处同构,存在切向量 $\tilde{X}_q$、$\tilde{Y}_q \in T_qN$,使

$$\varphi_* \tilde{X}_q = X_{\varphi(q)}, \varphi_* \tilde{Y}_q = Y_{\varphi(q)}。$$

因为 X、Y 在 $\varphi(N)$ 上光滑,φ 是光滑映射,显然 $\tilde{X}$、$\tilde{Y}$ 为 N 上光滑向量场。于是有

$$\varphi_*([\tilde{X}, \tilde{Y}]_q) = [X, Y]_{\varphi(q)},$$

由 $\varphi_*(T_qN) = L^h_{\varphi(q)}$ 知

$$[X, Y]_{\varphi(q)} \in L^h_{\varphi(q)}。$$

特别地,$[X, Y]_P \in L^h_p$。由 p 的任意性,$[X, Y] \in L^h$。

定理 2 的逆也成立,即

定理 3 设 L^h 是 M 上光滑分布,如果任给光滑向量场 X、$Y \in L^h$,都有 $[X, Y] \in L^h$,则在每点 $p \in M$,存在 P 的坐标邻域 V,使

$$L^h|_V = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^h}\right\},$$

此时,$N = \{(y^1, \cdots, y^m) \mid y^{h+1}, \cdots, y^m \text{ 均取常数}\}$ 为积分子流形。

先证明一个一阶偏微分方程组的可积性定理。

定理 4 设 $U\times V\subset R^m\times R^n$ 是开子集，$f_i^\alpha: U\times V\to R$ 是光滑函数。$1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant\alpha\leqslant n$，则对任一点 $(x_0,y_0)\in U\times V$，方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}=f_i^\alpha(x,y),\\ y^\alpha(x_0)=y_0^\alpha\quad,\end{cases}\qquad (*)$$

在点 x_0 的某个邻域 $W\subset U$ 内有唯一解 $y^\alpha=y^\alpha(x)(x\in W)$ 的充要条件是 $U\times V$ 上成立恒等式

$$\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^j}-\frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x^i}+\sum_{\beta=1}^n\left(\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial y^\beta}f_j^\beta-\frac{\partial f_j^\alpha}{\partial y^\beta}f_i^\beta\right)=0\ 。$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $y^\alpha=y^\alpha(x)$ 是方程组的解，则 $\dfrac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j\partial x^i}=\dfrac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j\partial x^i}$。

因为 $\dfrac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j\partial x^i}=\dfrac{\partial f_i^\alpha(x,y)}{\partial x^j}=\dfrac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^j}+\sum\limits_{\beta=1}^n\dfrac{\partial f_i^\alpha}{\partial y^\beta}\dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^j}$，于是

$$0=\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^j}-\frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x^i}+\sum_{\beta=1}^n\left(\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}-\frac{\partial f_j^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\right)\ 。$$

$\Leftarrow$ 不妨设 $x_0=0\in U$，确定 $y^\alpha(x^1,0,\cdots,0)$，使诸 y^α 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y^\alpha(x^1,0,\cdots,0)}{\partial x^1}=f_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0,y(x^1,0,\cdots,0)),\\ y^\alpha(0,\cdots,0)=y_0^\alpha。\end{cases}$$

(1) 考虑常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi_1^\alpha(t)}{dt}=f_1^\alpha(t,0,\cdots,0,\xi_1(t))\\ \xi_1^\alpha(0)=y_0^\alpha\end{cases}$$

在区间 $|t|<\varepsilon_1$ 内有唯一解 $\xi_1^\alpha(t)$，取 $y^\alpha(x^1,0,\cdots,0)=\xi_1^\alpha(x^1)$，$|x^1|<\varepsilon_1$ 即可。

(2) 对固定的 x^1，$|x^1|<\varepsilon_1$，考虑常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi_2(t)}{dt}=f_2^\alpha(x^1,t,0,\cdots,0\ \xi_2(x^1,t,0,\cdots,0)),\\ \xi_2^\alpha(0)=y^\alpha(x^1,0,\cdots,0),\end{cases}$$

当 ε_1 充分小时，对 $\forall x^1,|x^1|<\varepsilon$，上述方程在 $|t|<\varepsilon_2$ 内有唯一解 $\xi_2^\alpha(t)$。令

$$y^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)=\xi_2^\alpha(x^2),$$

函数 $y^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)}{\partial x^2}=f_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0,y(x^1,x^2,0,\cdots,0))\quad(**)\\ y^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)\big|_{x^2=0}=y^\alpha(x^1,0,\cdots,0)\text{((1)中的解)}\end{cases}$$

因此，$y^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)$在 $x^2=0$ 关于 x^1 的偏微商满足(*)，要证明 $y^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)$在 $x^2=0$ 对任意的关于 x^1 的偏微商也满足(*)，为此令

$$g(x^2)=\frac{\partial y^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)}{\partial x^1}-f_1^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0,y(x^1,x^2,0,\cdots,0)),$$

$$\begin{aligned}g'(x^2)&=\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^2\partial x^1}-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^2}\\ &\overset{(**)}{=}\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial x^1}+\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^1}-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial y^\beta}f_2^\beta\\ &\overset{\text{由条件}}{=}\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^1}-\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}f_1^\beta=\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^1}-f_1^\beta\right)\\ &=\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}g(x^2)\end{aligned}$$

由 $g(0)=0$(见(*)式)及解的唯一性，知 $g(x^2)\equiv 0$。从而

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^1}=f_1^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0,y(x^1,x^2,0,\cdots,0))$$

成立。

同法可构造函数 $y^\alpha(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0)$，它满足

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^1}=f_1^\alpha,\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^2}=f_2^\alpha,\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^3}=f_3^\alpha \text{及}\ y^\alpha(0,0,\cdots,0)=y_0^\alpha。$$

按上述步骤进行下去,就得到函数 $y^\alpha(x^1,x^2,\cdots,x^m)$,使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}=f_i^\alpha, & 1\leqslant i\leqslant m,\\ y^\alpha(0,\cdots,0)=y_0^\alpha。\end{cases}$$

定理 3 的证明如下:

任取一点 $p\in U$,则有 p 的局部坐标系 (V,x^i), $p\in V\subset U$,以及 V 上 h 个光滑切向量场 $X_1,\cdots,X_h$,使

$$L^h|_V=span\{X_1,\cdots,X_h\}。$$

设

$$X_\alpha=\sum_{i=1}^m a_\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant h,$$

由于 $X_1,\cdots,X_h$ 线性无关(在 V 处处),所以不妨设 $det(a_\alpha^\beta)\neq 0$。记 $(b_\alpha^\beta)=(a_\alpha^\beta)^{-1}$,则

$$b_\alpha^\beta X_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\sum_{r=h+1}^m C_\alpha^r\frac{\partial}{\partial x^r}。$$

令 $\tilde{X}_\alpha=b_\alpha^\beta X^\beta=\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}+\sum\limits_{r=h+1}^m C_\alpha^r\dfrac{\partial}{\partial x^r}$, $\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_h,\dfrac{\partial}{\partial x^{h+1}},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^m}$ 线性无关,且

$$\begin{aligned}[\tilde{X}_\alpha,\tilde{X}_\beta]&=[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+C_\alpha^r\frac{\partial}{\partial x^r},\frac{\partial}{\partial x^\beta}+C_\beta^s\frac{\partial}{\partial x^s}]\\&=[\frac{\partial}{\partial x^\alpha},C_\beta^s\frac{\partial}{\partial x^s}]+[C_\alpha^r\frac{\partial}{\partial x^r},\frac{\partial}{\partial x^\beta}]+[C_\alpha^r\frac{\partial}{\partial x^r},C_\beta^s\frac{\partial}{\partial x^s}]\\&=\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^s}-\frac{\partial C_\alpha^r}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^r}+C_\alpha^r\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^s}-C_\beta^s\frac{\partial C_\alpha^r}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial x^r}\\&=[\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial C_\alpha^r}{\partial x^\beta}+\frac{\partial C_\beta^r}{\partial x^s}C_\alpha^s-\frac{\partial C_\alpha^r}{\partial x^s}C_\beta^s]\frac{\partial}{\partial x^r}。\end{aligned}$$

由于 L^h 满足 Frohenius 条件,$[\tilde{X}_\alpha,\tilde{X}_\beta]$ 可表成 $\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_h$ 的线性组

合，但 $\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_h,\frac{\partial}{\partial x^{h+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}$线性无关，得

$$\frac{\partial C_\alpha^r}{\partial x^\beta}-\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial C_\alpha^r}{\partial x^s}C_\beta^s-\frac{\partial C_\beta^r}{\partial x^s}C_\alpha^s=0。$$

令 $x^i(p)=x_0^i$，将 V 视为 R^m 中开集，$R^m=R^h\times R^{m-h}$，$V=W_1\times W_2$，$(x_0^1,\cdots,x_0^h)\in W_1$，$(x_0^{h+1},\cdots,x_0^m)\in W_2$。于是，$C_\alpha^r:W_1\times W_2\to R$ 满足定理 4 的条件，对 $\forall(y^{h+1},\cdots,y^m)\in W_2$，方程组（$x^{h+1},\cdots,x^m$ 是未知函数）：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x^r}{\partial x^\alpha}=C_\alpha^r(x^1,\cdots,x^h,x^{h+1},\cdots,x^m), & h+1\leqslant r\leqslant m,\\ x^r(x_0^1,\cdots,x_0^h)=y^r\end{cases}$$

有唯一解（其中$(x^1,\cdots,x^h)\in W_1$）：

$$x^r=f^r(x^1,\cdots,x^h;y^{h+1},\cdots,y^m)\qquad（积分子流形），$$

f^r光滑依赖于自变量 $x^1,\cdots,x^h$ 及初始值 $y^{h+1},\cdots,y^m$。满足

$$f^r(x_0^1,\cdots,x_0^h,y^{h+1},\cdots,y^m)=y^r$$

的积分子流形的参数方程为

$$\begin{cases}x^\alpha=x^\alpha, & 1\leqslant\alpha\leqslant h,\\ x^r=f^r(x^1,\cdots,x^h,y^{h+1},\cdots,y^m), & h+1\leqslant r\leqslant m,\end{cases}\tag{*}$$

y^r 为常数，作坐标变换$(x^1,\cdots,x^m)\to(y^1,\cdots,y^h,y^{h+1},\cdots,y^m)$，使

$$\begin{cases}x^\alpha=y^\alpha\\ x^r=f^r(y^1,\cdots,y^h,y^{h+1},\cdots,y^m)\end{cases}\tag{**}$$

(*)式在坐标系$(y^1,\cdots,y^m)$下对应于

$$y^{h+1}=Const,\cdots,y^m=Const。$$

下证(**)可作为坐标变换。事实上，在 $p=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$处，有 $p=(x_0^1,\cdots,x_0^m)=(y_0^1,\cdots,y_0^h,y^{h+1},\cdots,y^m)$ （由满足初始条件知）。所以有

$$\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}\right|_{(y^1,\cdots,y^m)}=\begin{vmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ c^{h+1}_1 & \cdots & c^{h+1}_h & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ c^m_1 & \cdots & c^m_h & & & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

即$(y^1,\cdots,y^m)$可作为新的坐标系，且

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha}=\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}+\frac{\partial x^r}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^r}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y^\alpha}+C^r_\alpha\frac{\partial}{\partial y^r}=\tilde{X}_\alpha,$$

$$L^h\Big|_{W_1\times W_2}=Span\{\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_h\}=Span\left\{\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^h}\right\}。$$

定义4　L^h 是定义在 M 上的光滑分布，(φ,N)是 L^h 连通的积分子流形，且它的像 $\varphi(N)$不是 L^h 另一个连通积分子流形的真子集，则称(φ,N)是极大积分子流形。

定理5　M 满足第二可数性公理，若 L^h 满足 *Frobenius* 条件，则$\forall p\in M$，存在 L^h 的唯一极大积分子流形过 p，且每个过 p 的连通积分子流形必包含在其内。

§3　单参数可微变换群

定义1　光滑流形 M 到自身的微分同胚 $f:M\to M$ 称为一个变换。

定义2　设 $\varphi:R\times M\longrightarrow M$ 是光滑映射，$\forall(t,p)\in R\times M$，记 $\varphi_t(p)=\varphi(t,p)$，如果 φ_t 满足条件

(1)　$\varphi_0=id:M\longrightarrow M$　(恒同映射)，

(2)　$\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s}$，

则称 φ 是光滑作用在 M 上的单参数可微变换群。

由条件(1)、(2)知 φ_t 有逆映射 $\varphi_t^{-1}=\varphi_{-t}$，且由于 φ 是可微的，所以 φ_t 是 M 上的变换。

例 1 设 $M=R^2$，$\varphi: R\times R^2\to R^2$ 定义为

$$\varphi(t,x)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix},$$

其中 $X=(x^1,x^2)\in R^2$，由于

$$\varphi_t=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix},$$

所以有 $\varphi_0=id$，$\varphi_{t+s}=\varphi_s\circ\varphi_t$，$\varphi$ 的可微性是显然的，所以 φ 是光滑作用在 R^2 上的单参数可微变换群。

例 2 设 $M=S^1\times S^1=\{p=(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\mid(\theta_1,\theta_2)\in R^2\}$，$\varphi: R^1\times M\to M$ 定义为

$$\varphi(t,p)=(e^{i(\theta_1+t)},e^{i\theta_2})$$

则 $\varphi_t: M\to M$ 为可微同胚且 $\varphi_0=id: M\to M$，$\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s$。

任意固定 $p\in M$，记 $\gamma_p(t)=\varphi(t,p)$，则 $\gamma_p: R^1\to M$ 表示 M 中一条光滑曲线，由于 $\gamma_p(0)=p$，曲线 γ_p 通过点 p，称 $\gamma_p(t)$ 为单参数变换群 φ 过 p 的轨线，设 $\gamma_p(t)$ 在 p 的切向量为 X_p，即

$$X_pf=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f\circ\gamma_p(t),\quad \forall f\in C_p^\infty$$

这样，得到 M 上向量场 X，称为单参数可微变换群在 M 上诱导的向量场。

定理 1 设 X 为 M 上单参数可微变换群 φ 诱导的向量场，那么有

(1) X 是光滑的。

(2) φ 的任意一条轨线 $\gamma_p(t)$ 是它诱导的切向量场 X 的积分曲线。

(3) $(\varphi_t)_*X=X$（X 是 φ_t 作用下的不变向量场）。

证明 (1) $\forall p\in M$，取 p 的局部坐标系 (U,x^i)，设 p 的坐标为 $(x_0^1,\cdots,x_0^m)$，$\gamma_p(t)$ 的局部表示为

$$x^i=\varphi^i(t,x_0^1,\cdots,x_0^m)$$

则

$$X_p = \frac{\partial \varphi^i(t, x_o^1, \cdots, x_o^m)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

由于函数$\frac{\partial \varphi^i(t, x^1, \cdots, x^m)}{\partial t}\bigg|_{t_0}$在$(x_0^1, \cdots, x_0^m)$可微，所以向量场 X 在 p 是可微的。

(2)　$\forall q \in \gamma_p(t)$，设 $q = \gamma_p(s) = \varphi_s(p)$，于是有

$$\gamma_q(t) = \varphi(t, q) = \varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi_t(\varphi(s, p)) = \varphi_t \circ \varphi_s(p)$$
$$= \varphi_{t+s}(p) = \gamma_p(t + s)$$

所以有

$X_q = \gamma_q'(0) = \gamma_p'(s)$，即 $\gamma_q(t)$是 X 的积分曲线。

(3)　由于 $\varphi_s(p) = \gamma_q(s)$，所以对$\forall f \in C^\infty_{\varphi_s(p)}$

$$X_{\varphi_s(p)} f = \frac{df \circ \gamma_p(t)}{dt}\bigg|_{t=s} = \frac{df \circ \varphi(t, p)}{dt}\bigg|_{t=s}$$
$$= \frac{df \circ \varphi(t + s, p)}{dt}\bigg|_{t=0}$$
$$= \frac{df \circ \varphi_s(\gamma_p(t))}{dt}\bigg|_{t=0}$$
$$= X_p(f \circ \varphi_s) = ((\varphi_s)_* X_p) f$$

即 $X_{\varphi_s(p)} = (\varphi_s)_* X_p$。

从上面的讨论知道，M 上的单参数可微变换群诱导了 M 上的光滑向量场，相反的问题是：给定 M 上光滑向量 X，是否存在单参数可微变换群 φ，它所诱导的向量场是 X，答案是局部上一定存在。

定义 3　设 U 是光滑流形 M 的开集，若有光滑映射 $\varphi:(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \longrightarrow M$，使对$\forall p \in U, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，满足

(1)　$\varphi_0 = \varphi(0, \cdot) = id: U \longrightarrow U$

(2)　当 $t, s, t + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$且 $p, \varphi_s(p) \in U$ 时 $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$

成立，则称 φ_t 为作用在 U 上的局部单参数可微变换群。

定理 2 设 X 是定义在 M 上的光滑切向量场，$\forall p \in M$，存在 p 的邻域 U 及作用在 U 上的单参数可微变换群 φ_t，使 $X|_U$ 是 φ_t 诱导的向量场。

证明 取 p 的局部坐标系(V, x^i)，设

$$X|_V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

则 $X^i \in C^\infty(V)$，考虑常微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^i, \cdots, x^m), \quad |t| < \varepsilon, (x^1, \cdots, x^m) \in V。$$

由常微分方程理论，存在 $\varepsilon_1 > 0$ 及 p 的邻域 $U_1 \subset V$，使对 $\forall q \in U_1$，存在唯一的解 $x_q(t) \quad (|t| < \varepsilon_1)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = X^i(x_q(t)) \\ x_q(0) = q \end{cases}$$

且 $x_q(t)$光滑依赖(t, q)。令

$$\varphi(t, q) = \varphi_t(q) = x_q(t)$$

则 $\varphi:(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times U_1 \to M$ 是光滑映射。

取 $t, s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$，使 $t + s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$且 $q \in U_1$ 时 $\varphi_s(q) \in U_1$，因为

$$\frac{dx_q^i(t+s)}{dt} = \frac{dx_q^i(u)}{du}\Big|_{t+s} = X^i(x_q(t+s)),$$

$$x_q(t+s)|_{t=0} = x_q(s) = \varphi_s(q) \in U_1,$$

因此 $x_q(t+s)$是过 $\varphi_s(q)$的解，另外，过 $\varphi_s(q)$的解是 $X_{\varphi_s(q)}(t)$，由解的唯一性得出 $x_{\varphi_s(q)}(t) = x_q(t+s)$，所以有

$$\varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q) \quad (\varphi_t \text{ 为 } U_1 \text{ 上单参群})$$

由于 $x_q'(0) = X_q$，所以 φ_t 诱导 $X|_{U_1}$。

作为定理 2 的证明的推论，有

命题 1 设 φ_t,ψ_t 为光滑向量场 X 生成的分别作用在 U 和 V 上的两个局部单参群，若 $U\cap V\neq\Phi$，则对 $\forall\, q\in U\cap V$，有

$$\varphi_t(q)=\psi_t(q),\quad |t|<\varepsilon$$

证明 令 $\gamma_q(t)=\varphi(t,q),\tilde{\gamma}_q(t)=\psi(t,q)$，则它们满足同一微分方程组

$$\frac{d\gamma_q(t)}{dt}=X_{\gamma_q(t)},\quad \frac{d\tilde{\gamma}_q(t)}{dt}=X_{\tilde{\gamma}_q(t)}$$

及同一初始条件 $\gamma_q(0)=q,\quad \tilde{\gamma}_q(0)=q$，由解的唯一性得 $\varphi_t(q)=\psi_t(q)$

定理 3 设 M 是紧致的 m 维光滑流形，则 M 上任意一个光滑向量场 X 生成作用在 M 上的单参数可微变换群 $\varphi: R\times M\to M$，即存在单参数可微变换群 φ，使 X 是由 φ 诱导的光滑向量场。

证明 $\forall\, p\in M$，由定理 2，存在 p 的邻域 U_p 及作用在 U_p 上的单参数可微变换群 $\varphi^{(p)}:(-\varepsilon_p,\varepsilon_p)\times U_p\to M$，满足 $\varphi_o^{(p)}=id: U_p\longrightarrow U_p$，如果 $|t|<\varepsilon_p,|s|<\varepsilon_p,|t+s|<\varepsilon_p$，且 $\varphi_s^{(p)}\in U_p$ 则 $\varphi_s^{(p)}\circ\varphi_t^{(p)}=\varphi_{s+t}^{(p)}$，$\varphi^{(p)}$诱导 $X|_{U_p}$ 由 $\varphi^{(p)}$连续且 $\varphi^{(p)}(o,p)=p$，所以存在正数 $\tilde{\varepsilon}_p$ 及 p 的邻域 $V_p\subset U_p$，使得 $\varphi^{(p)}((-\tilde{\varepsilon}_p,\tilde{\varepsilon}_p)\times V_p)\subset U_p$。因为 M 是紧致的，所以开覆盖$\{V_p|p\in M\}$有有限子覆盖$\{V_\alpha|1\leqslant\alpha\leqslant\gamma\}$，相应的局部单参数可微变换群为 $\varphi^{(\alpha)}:(-\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\alpha)\times U_2\to M$，取 $\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant r}\{\tilde{\varepsilon}_\alpha\}$，则由 $\tilde{\varepsilon}_\alpha$ 及 V_2 的选取法，就有

$$\varphi^{(\alpha)}((-\varepsilon,\varepsilon)\times V_2)\subset U_2$$

(1) 定义 $\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times M\longrightarrow M$：若 $p\in U_\alpha$，则

$$\varphi(t,p)=\varphi^{(\alpha)}(t,p),\qquad \forall\, t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

由命题 1，上述 φ 的定义与 U_α 的选取无关，因此是有意义的。

由于$\{V_\alpha\}$是 M 的覆盖，所以 $\forall\, p\in M$ 存在 V_α，使 $p\in V_\alpha$，且有相应的 $U_\alpha\supset V_\alpha$，

于是 $\varphi_t(p)=\varphi_t^{(\alpha)}(p)\in U_\alpha$，从而对 $|t|<\varepsilon,|s|<\varepsilon,|t+s|<\varepsilon$，有

$$\varphi_{s+t}(p)=\varphi_{s+t}^{(\alpha)}(p)=\varphi_s^{(\alpha)}\circ\varphi_t^{(\alpha)}(p)=\varphi_s\circ\varphi_t(p)\quad \forall p\in M,|t|<\varepsilon$$

(2) 再将(1)中的 φ 扩展到 R 上，即将 φ 的定义域从 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times M$ 扩展到 $R\times M$ 上，对 $\forall t\in R$，存在自然数 N，使 $\frac{t}{N}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$。定义

$$\varphi(t,p)=(\varphi_{t/N})^N(p),\quad \forall(t,p)\in R\times M,$$

其中 $(\varphi_{t/N})^N=\underbrace{\varphi_{t/N}\circ\cdots\circ\varphi_{t/N}}_{N}$，由(1)，它是有意义的。再证明上述定义与自然数 N 的选取无关。若有另一自然数 $\tilde{N}$，使 $\frac{t}{\tilde{N}}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，取 N 与 $\tilde{N}$ 的公倍数 $B=n\cdot N=\tilde{n}\cdot\tilde{N}$，那么由(1)的结论，

$$\varphi_{t/N}(p)=(\varphi_{t/B})^n(p)$$

于是

$$(\varphi_{t/N})^N(p)=(\varphi_{t/B})^{nN}(p)=(\varphi_{t/B})^B(p)$$

同理

$$(\varphi_{t/\tilde{N}})^{\tilde{N}}(p)=(\varphi_{t/B})^B(p)$$

可见

$$(\varphi_{t/N})^N=(\varphi_{t/\tilde{N}})^{\tilde{N}}。$$

容易验证上述定义的 $\varphi:R\times M\longrightarrow M$ 适合单参群的条件(1)、(2)。

定理 4 设 φ_t 是作用在 M 上的单参数可微变换群，X 是 φ_t 诱导的向量场，若 $\psi:M\to M$ 是一个可微变换，那么

$$\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}:M\to M$$

也是作用在 M 上的单参数可微变换群且诱导光滑向量场 ψ_*X。

证明 令 $\tilde{\varphi}_t=\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$，由于 φ_t 是单参数，ψ 是可微同胚，所以 $\tilde{\varphi}_{t+s}=(\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi_s\circ\psi^{-1})=\tilde{\varphi}_t\circ\tilde{\varphi}_s,\tilde{\varphi}_0=id$，可见 $\tilde{\varphi}_t$

是作用在 M 上的单参数可微变换群，设 $\tilde{\varphi}_t$ 诱导向量场 $\tilde{X}$，那么对 $\forall p\in M,\forall f\in C_p^\infty$，有

$$
\begin{aligned}
(\psi_* X_p)f &= X_p(f\circ\psi)\\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f\circ\psi(\varphi_t(p)))\\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f\circ\tilde{\varphi}_t(\psi(p)))\\
&= \tilde{X}_{\psi(p)}f
\end{aligned}
$$

即　$\psi_* X_p=\tilde{X}_{\psi(p)}$，亦即 $\psi_* X=\tilde{X}$。

推论　单参数可微变换群 φ_t 诱导的切向量场 X 在可微同胚 $\psi:M\to M$ 下不变的充要条件是 φ_t 与 ψ 可交换，即

$$\varphi_t\circ\psi=\psi\circ\varphi_t。$$

证明　若 $\psi_* X=X$，那么由定理 4，$\tilde{\varphi}_t=\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$诱导向量场 X，即 φ_t 与 $\tilde{\varphi}_t$ 诱导的向量场相同，由命题 1 可推得 $\varphi_t=\tilde{\varphi}_t$，即 $\varphi_t\circ\psi=\psi\circ\varphi_t$。

$\Leftarrow$　若 $\varphi_t\circ\psi=\psi\circ\varphi_t$，则 $\varphi_t=\tilde{\varphi}_t$，由定理 1，$(\varphi_t)_* X=X$，由定理 4，$\tilde{\varphi}_{t*}X=\psi_* X$，所以有 $\psi_* X=X$。

定理 5　设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，X 在点 $p\in M$ 的邻域内生成的单参数可微变换群是 φ_t，则

$$[X,Y]_p=\lim_{t\to0}\frac{(\varphi_t^{-1})_* Y_{\varphi_t(p)}-Y_p}{t}$$

证明　$\forall f\in C_p^\infty$，设 f 在 p 的邻域 U 上光滑，$\forall q\in U$，令

$$F(t)(q)=f\circ\varphi_t^{-1}(q)$$

则

$$F(t)(q)-F(0)(q)=\int_0^1\frac{dF(st)(q)}{ds}ds=t\int_0^1\frac{dF(u)(q)}{du}\bigg|_{u=st}ds$$

所以有

$$F(t)(q)=f(q)+tg_t(q)$$

其中 $g_t(q)=\int_0^1 \left.\frac{dF(u)(q)}{du}\right|_{u=st} ds$，且有

$$g_0(q)=\left.\frac{dF(t)(q)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{df\circ\varphi_t^{-1}(q)}{dt}\right|_{t=0}=-\left.\frac{df\circ\varphi_t(q)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$=-X_qf=-(Xf)(q)$$

所以在 U 上有 $g_0=-Xf$。

注意到

$$((\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p)f=Y_{\varphi_t(p)}(f\circ\varphi_t^{-1})-Y_pf$$

$$=Y_{\varphi_t(p)}(f+tg_t)-Y_pf$$

$$=Y_{\varphi_t(p)}f-Y_pf+tY_{\varphi_t(p)}g_t$$

$$=(Yf)(\varphi_t(p))-(Yf)(p)+tY_{\varphi_t(p)}g_t,$$

就有

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{(\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p}{t}\right)f=\lim_{t\to0}\left(\frac{(Yf)(\varphi_t(p))-(Yf)(p)}{t}+Y_{\varphi_t(p)}g_t\right)$$

$$=\left.\frac{d((Yf)\circ\varphi_t(p))}{dt}\right|_{t=0}+Y_pg_0$$

$$=X_p(Yf)-Y_p(Xf)=[X,Y]_pf。$$

证毕。

定义 4 极限 $\lim\limits_{t\to0}\frac{(\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p}{t}$ 称向量场 Y 沿着向量场 X 在点 p 的 *Lie* 导数，记为 $(L_XY)(p)$，由定理 5 看出

$$L_XY=[X,Y]。$$

由定义立得：

命题 2 若光滑向量场 Y 在单参数可微变换群 φ_t 下不变，那么 Y 沿 φ_t 诱导的光滑向量场 X 的 *Lie* 导数为零，即

$$(\varphi_t)_*Y=Y \quad\Rightarrow\quad L_XY=0$$

反之，我们有

命题 3 设 X 为单参数可微变换群 φ_t 诱导的向量场，若 $Y\in\mathscr{X}(M)$ 适合 $[X,Y]=0$，则 $(\varphi_t)_*Y=Y$，即 Y 在 φ_t 下不变。

证明 $\forall p\in M,\forall f\in C_p^\infty$，令

$$G(t)=((\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p)f$$

则

$$\begin{aligned}G(s+t)&=((\varphi_s^{-1})_*(\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(\varphi_s(p))}-Y_p)f\\&=(\varphi_s^{-1})_*((\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(\varphi_s(p))}-Y_{\varphi_s(p)})f\\&\quad+((\varphi_s^{-1})_*Y_{\varphi_s(p)}-Y_p)f\\&=((\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(\varphi_s(p))}-Y_{\varphi_s(p)})f\circ\varphi_s^{-1}\\&\quad+((\varphi_s^{-1})_*Y_{\varphi_s(p)}-Y_p)f\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}G'(s)&=\lim_{t\to0}\frac{G(t+s)-G(s)}{t}=\lim_{t\to0}\left(\frac{(\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(\varphi_s(p))}-Y_{\varphi_s(p)}}{t}\right)f\\&=[X,Y]_{\varphi_s(p)}f=0\end{aligned}$$

于是

$$((\varphi_s^{-1})_*Y_{\varphi_s(p)}-Y_p)f=G(s)=G(0)=0$$

即

$$Y_{\varphi_s(p)}=(\varphi_s)_*Y_p。$$

从定理 4 的推论及命题 2、3 就有下面的结论：

定理 6 设 φ_t,φ_s 为两个作用在 M 上的单参数可微变换群，X,Y 分别为它们诱导的向量场，则

$$[X,Y]=0\iff\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_t$$

定理 6 的一个直接应用是证明下面的定理。

定理 7* 设 M 是 m 维紧致连通的光滑流形，若 M 上存在 m 个

处处线性无关的且两个可交换的向量场，则 M 必微分同胚于 m 维环面，即

$$M \cong T^m = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{m}。$$

注：向量场 $X_1, \cdots, X_m$ 两两可交换是指 $[X_i, X_j] = 0, 1 \leqslant i, j \leqslant m$。

§4　张量和外代数

4.1　张　量

本节是为研究微分流形作一些代数上的准备。

我们已经知道，若 V 是数域 F（通常指实数域）上 n 维矢量空间，V^* 是 V 的对偶空间，若 $v \in V, v^* \in V^*$，定义 $\langle v, v^* \rangle = v^*(v) \in F$，则 $\langle , \rangle$ 是定义在 $V \times V^*$ 上的 F－值函数，它对每个变量都是线性的，即对 $v, v_1, v_2 \in V, v^*, v^{*1}, v^{*2} \in V^*, \alpha_1, \alpha_2 \in F$ 有：

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v^* \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v^* \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v^* \rangle$$

$$\langle v, \alpha_1 v^{*1} + \alpha_2 v^{*2} \rangle = \alpha_1 \langle v, v^{*1} \rangle + \alpha_2 \langle v, v^{*2} \rangle$$

在 $\langle v, v^* \rangle = v^*(v)$ 中固定 v，则 $\langle v, . \rangle$ 是 V^* 上的 F－值线性函数，称为由 v 生成的。我们还知道 $(V^*)^* = V$，即 V 是自反的。

现在把上面的讨论稍作一些推广，假定 V, W, Z 都是域 F 上的有限维矢量空间。

定义 1.1　映射 $f: V \to Z$ 称为线性的。如果对于 $v_1, v_2 \in V$，$\alpha^1, \alpha^2 \in F$ 有

$$f(\alpha^1 v_1 + \alpha^2 v_2) = \alpha^1 f(v_1) + \alpha^2 f(v_2)。$$

映射 $f: V\times W\to Z$ 称为双线性的，如果 f 对于每一个变量都是线性的，即对任意的 $v,v_1,v_2\in V,w,w_1,w_2\in W,\alpha_1,\alpha_2\in F$ 有：

$$\begin{cases}f(\alpha^1 v_1+\alpha^2 v_2,w)=\alpha^1 f(v_1,w)+\alpha^2 f(v_2,w)\\ f(v,\alpha^1 w_1+\alpha^2 w_2)=\alpha^1 f(v,w_1)+\alpha^2 f(v,w_2)\end{cases}$$

类似地，映射 $f: V_1\times\cdots\times V_r\to Z$，其中 $V_1,\cdots,V_r$ 都是域 F 上的有限维矢量空间。若 f 对每一变量都是线性的，称 f 是 r 重线性的。

在以上定义中，令 $Z=F$(Z 看作 F 上的一维矢量空间)，定义 1.1 给出的分别就是 F – 值线性函数，F – 值双线性函数和 F – 值 r 重线性函数。

从 $V_1\times\cdots\times V_r$ 到 Z 的全体 r 重线性映射的集合记作 $L(V_1,\cdots,V_r;Z)$。在这个集合中引进运算，当 $f,g\in L(V_1,\cdots,V_r;Z),\alpha\in F$，对任意的 $v_i\in V_i(1\leqslant i\leqslant r)$命：

$$(f+g)(v_1,\cdots,v_r)=f(v_1,\cdots,v_r)+g(v_1,\cdots,v_r)$$

$$(\alpha f)(v_1,\cdots,v_r)=\alpha f(v_1,\cdots,v_r)$$

则运算封闭且 $L(V_1,\cdots,V_r;Z)$关于这两种运算成为域 F 上的矢量空间。

下面说明张量积的概念。先看对偶空间 V^* 和 W^* 的张量积。设 $v^*\in V^*,w^*\in W^*$，线性函数 v^* 和 w^* 的张量积记为：$v^*\otimes w^*$，满足：对任意的 $v\in V,w\in W$ 有

$$v^*\otimes w^*(v,w)=v^*(v)\cdot w^*(w)=<v,v^*>\cdot<w,w^*>$$

由 V^* 和 W^* 的线性，知 $v^*\otimes w^*$ 是 $V\times W$ 上的双线性函数，即 $v^*\otimes w^*\in L(V,W;F)$。因此，运算$\otimes$是从 $L(V;F)\times L(W;F)$到 $L(V,W;F)$的双线性映射，即$(a_1v_1^*+a_2v_2^*)\otimes w^*=a_1(v_1^*\otimes w^*)+a_2(v_2^*\otimes w^*)$，类似地运算$\otimes$对第二个因子也是线性的。所有形如 $v^*\otimes w^*(v^*\in V^*,w^*\in W^*)$的元素所生成的矢量空间称为 V^* 和 W^* 的张量积，它是 $L(V,W;F)$的子空间。

在 V^* 和 W^* 中分别取基底，$\{a^{*i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 和 $\{b^{*\alpha}, 1 \leqslant \alpha \leqslant m\}$ $\therefore v^* \otimes w^* = (\sum_i v^*(a_i) a^{*i}) \otimes (\sum_\alpha w^*(b_\alpha) b^{*\alpha}) = (\sum_{i,\alpha} v^*(a_i) w^*(b_\alpha) a^{*i} \otimes b^{*\alpha}$，其中 $\{a_i\}$，$\{b_i\}$ 分别是对偶基底。因此，$v^* \otimes w^*$ 中的元素可表为 $a^{*i} \otimes b^{*\alpha}$ 的线性组合。易证 $a^{*i} \otimes b^{*\alpha}$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant \alpha \leqslant m)$ 是线性无关的，所以 $v^* \otimes w^*$ 的基底是 $\{a^{*i} \otimes b^{*\alpha}: (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant \alpha \leqslant m\}$ 是 $n \times m$ 维矢量空间。可以证明任一 $f \in L(V, W; F)$ 可表为 $a^{*i} \otimes b^{*\alpha}$ 的线性组合，因此

$$V^* \otimes W^* = L(V, W; F)$$

因为 V 和 W 分别是 V^* 和 W^* 的对偶空间，于是可类似地定义两个矢量空间 V 和 W 的张量积：

$$V \otimes W = L(V^*, W^*; F)$$

它是 $V^* \times W^*$ 上全体双线性函数形成的矢量空间。

$V \otimes W$ 和 $V^* \otimes W^*$ 是互为对偶的，只要命

$$< v \otimes w, v^* \otimes w^* > = < v, v^* > \cdot < w, w^* >$$

特别是：$< a_i \otimes b_\alpha, a^{*j} \otimes b^{*\beta} > = \delta_i^j \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & (i, \alpha) = (j, \beta) \\ 0 & (i, \alpha) \neq (j, \beta) \end{cases}$

所以 $\{a_i \otimes b_\alpha\}$ 和 $\{a^{*i} \otimes b^{*\alpha}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant \alpha \leqslant m\}$ 是互为对偶的基底，因此，

$$V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$$

定理 1.1　张量积运算 $\otimes$ 适合结合律，即对任意的 $\varphi \in L(V; F)$，$\psi \in L(W; F)$，$\xi \in L(Z, F)$，有 $(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi = \varphi \otimes (\psi \otimes \xi)$。

证明　任意取 $v \in V, w \in W, z \in Z$，则

$(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi(v, w, z) = \varphi \otimes \psi(v, w) \cdot \xi(z) = \varphi(v) \cdot \psi(w) \cdot \xi(z)$，

同理

$\varphi \otimes (\psi \otimes \xi)(v, w, z) = \varphi(v) \cdot \psi(w) \cdot \xi(z)$，所以 $(\varphi \otimes \psi) \otimes \xi = \varphi \otimes (\psi \otimes \xi)$

由定理 1.1 记号 $\varphi \otimes \psi \otimes \xi$ 是有意义的，称为 φ, ψ, ξ 的张量积。把形如 $v \otimes w \otimes z (v \in V, w \in W, z \in Z)$ 的元素的全体所生成

的矢量空间记作 $V\otimes W\otimes Z$,称为三个矢量空间的张量积。运算 $\otimes$ 是从 $L(V^*;F)\times L(W^*;F)\times L(Z^*;F)$ 到 $L(V^*,W^*,Z^*;F)$ 的线性映射。

同理,若 $V_1,\cdots,V_s$ 是域 F 上的矢量空间,则可定义 S 个矢量空间的张量积 $V_1\otimes\cdots\otimes V_s=L(V_1^*,\cdots,V_s^*;F)$。运算 $\otimes$ 是从 $L(V_1^*;F)\times\cdots\times L(V_s^*;F)$ 到 $L(V_1^*,\cdots,V_s^*;F)$ 的线性映射,若 V_i 的基底是 $\{a_1^{(i)},\cdots,a_{n_i}^{(i)}\}(1\leqslant i\leqslant s)$ 其中 $n_i=V_i$ 的维数,则 $V_1\otimes\cdots\otimes V_s$ 的基底是:

$$a_{m_1}^{(1)}\otimes a_{m_2}^{(2)}\otimes\cdots\otimes a_{m_s}^{(s)}\quad 1\leqslant m_i\leqslant n_i, i=1,\cdots,s$$

即从 V_i 的基底 $(1\leqslant i\leqslant s)$ 中:

$$\begin{array}{c} a_1^{(1)},\cdots,a_{n_1}^{(1)} \\ a_1^{(2)},\cdots,a_{n_2}^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_1^{(s)},\cdots,a_{n_s}^{(s)} \end{array}$$

每一行中取一个作张量积,这样的取法共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_s$ 种,因此

$$dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_s)=dimV_1\cdot\cdots\cdot dimV_s$$

在微分几何中,经常用到的是同一矢量空间 V 与其对偶空间 V^* 的张量积。

定义 1.2 设 V 是域 F 上的 n 维矢量空间,对偶空间是 V^*,张量积

$$V_s^r=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{个}}$$

的元素称为 V 上 (r,s) 型张量,称 r 是张量的反变阶数,j 是张量的协变阶数。

特别地,$V_0^r=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}$ 的元素叫做 r 阶反变张量。

$$V_s^0 = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r个}$$ 的元素叫做 s 阶协变张量。

约定 $V_0^0 = F, V_0^1 = V$，它的元素称为反变矢量，$V_1^0 = V^*$，它的元素称为协变矢量。

显然 $dimV_s^r = n^{r+s}$，并且

$$V_s^r = L(\underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{r个}, \underbrace{V, \cdots, V}_{s个}; F)$$

这就是说，(r,s)型张量是在

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r个} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s个}$$

上的 F－值$(r+s)$重线性函数。

设$\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$和$\{e^{*i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$分别是 V 和 V^* 的彼此对偶的基底，则空间 V_s^r 的基底为

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s}$$

$$1 \leqslant i_1, \cdots, i_r, k_1, \cdots, k_s \leqslant n$$

例 1　$V_1^1 = V \otimes V^* = L(V^*, V; F)$，基底为：$e_1 \otimes e^{*1}, \cdots, e_1 \otimes e^{*n}, e_2 \otimes e^{*1} \cdots e_2 \otimes e^{*n}, \cdots e_n \otimes e^{*1}, \cdots, e_n \otimes e^{*n}$，共有 n^2 个元，因此 $dimV_1^1 = n^2$。

任一(r,s)型张量 x 可唯一表为

$$x = \sum x^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*k_1} \otimes \cdots \otimes e^{*k_s}$$

其中分量 $x^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s} = x(e^{*i_1}, \cdots, e^{*i_r}, e_{k_1}, \cdots, e_{k_s}) = < e^{*i_1} \otimes \cdots \otimes e^{*i_r} \otimes e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_s}, x >$

例 2　设 $dimV = 2$，则 V_1^1 的基底为 $e_1 \otimes e^{*1}, e_1 \otimes e^{*2}, e_2 \otimes e^{*1}, e_2 \otimes e^{*2}$。张量 $x = x_1^1 e_1 \otimes e^{*1} + x_2^1 e_1 \otimes e^{*2} + x_1^2 e_2 \otimes e^{*1} + x_2^2 e_2 \otimes e^{*2}$。因此，$x(e^{*1}, e_1) = x_1^1 e_1 \otimes e^{*1}(e^{*1}, e_1) = x_1^1 e_1(e^{*1}) e^{*1}(e_1) = x_1^1 < e^{*1}, e_1 > \cdot < e_1, e^{*1} > = x_1^1 < e^{*1} \otimes e_1, e_1 \otimes e^{*1} > = < e^{*1} \otimes e_1, x > = x_1^1$，一般地，$x(e^{*i}, e_j) = \sum x_\alpha^\beta e_\beta \otimes e^{*\alpha}(e^{*i}, e_j)$

$= x^i_j(e_i \otimes e^{*j})(e^{*i}, e_j) = x^i_j$ 或 $< e^{*i} \otimes e_j, x > = x^i_j, (i, j = 1,2)$

当矢量空间 V 的基底改变时，张量 x 的分量按下述规律变换。设 $\{\bar{e}_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 V 的另一基底，相应的对偶基底是 $\{\bar{e}^{*i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$，且 $\bar{e}_i = \alpha^j_i e_j$，其中 $\alpha = (\alpha^j_i)$ 是行列式不为零的 n 阶方阵。则 $\bar{e}^{*i} = \beta^i_j e^{*j}$，其中 $\beta = (\beta^i_j)$ 是 α 的逆矩阵，事实上，$\beta^k_j \alpha^j_i = \beta^k_m e^{*m}(\alpha^l_i e_l) = \bar{e}^{*k} \bar{e}_i = \delta^k_i$，即 $\beta\alpha = I \quad \therefore \beta = \alpha^{-1}$。若用 $\bar{x}^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s}$ 记张量 x 在新基底下的分量，则 $\bar{e}_{i_1} = \alpha^{j_1}_{i_1} e_{j_1}, \cdots, \bar{e}_{i_r} = \alpha^{j_r}_{i_r} e_{j_r}, \bar{e}^{*k_1} = \beta^{k_1}_{l_1} e^{*l_1}, \cdots, \bar{e}^{*k_s} = \beta^{k_s}_{l_s} e^{*l_s}$ 于是，

$$
\begin{aligned}
x &= \bar{x}^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s} \bar{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}_{i_r} \otimes \bar{e}^{*k_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}^{*k_s} \\
&= x^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s} \alpha^{j_1}_{i_1} \cdots \alpha^{j_r}_{i_r} \beta^{k_1}_{l_1} \cdots \beta^{k_s}_{l_s} \; e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \otimes e^{*l_1} \otimes \cdots \otimes e^{*l_s},
\end{aligned}
$$

所以

$$
x^{j_1 \cdots j_r}_{l_1 \cdots l_s} = x^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_s} \alpha^{j_1}_{i_1} \cdots \alpha^{j_r}_{i_r} \beta^{k_1}_{l_1} \cdots \beta^{k_s}_{l_s}
$$

在经典的张量分析中，是根据这个变换公式来定义张量的。

例 3 设 V 是三维矢量空间，$V^0_2 = V^* \otimes V^*$，设二阶协变张量 $x \in V^0_2$，则 $x = x_{11} e^{*1} \otimes e^{*1} + x_{12}^{*1} \otimes e^{*2} + x_{13} e^{*1} \otimes e^{*3} + x_{21} e^{*2} \otimes e^{*1} + x_{22} e^{*2} \otimes e^{*2} + x_{23} e^{*2} \otimes e^{*3} + x_{31} e^{*3} \otimes e^{*1} + x_{32} e^{*3} \otimes e^{*2} + x_{33} e^{*3} \otimes e^{*3} = x_{k_1 k_2} e^{*k_1} \otimes e^{*k_1}$ 设

$$
\begin{pmatrix} \bar{e}^{*1} \\ \bar{e}^{*2} \\ \bar{e}^{*3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^1_1 & \beta^1_2 & \beta^1_3 \\ \beta^2_1 & \beta^2_2 & \beta^2_3 \\ \beta^3_1 & \beta^3_2 & \beta^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{*1} \\ e^{*2} \\ e^{*3} \end{pmatrix}
$$

则 $x_{l_1 l_2} = \bar{x}_{k_1 k_2} \beta^{k_1}_{l_1} \beta^{k_2}_{l_2}$。如 $x_{11} = \bar{x}_{11} \beta^1_1 \beta^1_1 + \bar{x}_{12} \beta^1_1 \beta^2_1 + \bar{x}_{13} \beta^1_1 \beta^3_1 + \bar{x}_{21} \beta^2_1 \beta^1_1 + \bar{x}_{22} \beta^2_1 \beta^2_1 + \bar{x}_{23} \beta^2_1 \beta^3_1 + \bar{x}_{31} \beta^3_1 \beta^1_1 + \bar{x}_{32} \beta^3_1 \beta^2_1 + \bar{x}_{33} \beta^3_1 \beta^3_1$。在经典张量分析中，三维空间 V 上的量 x 要用九个分量来表达，并且当坐标变换后，这九个分量按上述规律变换，这样的 x 就是二阶协变张量。

V_s^r 是矢量空间，所以同类型的张量可以相加，张量也可与实数相乘(数量积)。设 $x = x_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s}$，$y = y_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s}$，则

$$ax + by = (ax_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r} + by_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r}) e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s}$$

两个不同类型的张量相乘，就是他们作为多重线性函数的张量积。

定义 1.3 设 $x\in V_{s_1}^{r_1}$，$y\in V_{s_2}^{r_2}$，则积 $x\otimes y$ 是 (r_1+r_2, s_1+s_2) 型张量，满足 $x\otimes y(v^{*1},\cdots,v^{*r_1+r_2},v_1,\cdots,v_{s_1+s_2}) = x(v^{*1},\cdots,v^{*r_1},v_1,\cdots,v_{s_1})\cdot y(v^{*r_1+1},\cdots,v^{*r_1+r_2},v_{s_1+1},\cdots,v_{s_1+s_2})$

在取定基底后，$x\otimes y$ 的分量等于 x 和 y 的分量之积，即

$$(x\otimes y)_{k_1\cdots k_{s_1+s_2}}^{i_1\cdots i_{r_1+r_2}} = x_{k_1\cdots k_{s_1}}^{i_1\cdots i_{r_1}}\cdot y_{k_{s_1+1}\cdots k_{s_1+s_2}}^{i_{r_1+1}\cdots i_{r_1+r_2}}$$

设 $T^r(V) = V_0^r = \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r个}$ 考虑直和：

$$T(V) = \sum_{r\geqslant 0} T^r(V)$$

其元素 x 可表成形式和 $x = \sum_{r\geqslant 0} x^r$。　$x^r\in T^r(V)$。

和式中除有很多项外，其余各项都是零。这样 $T(V)$ 是无限维矢量空间。张量的乘法通过分配律可以扩充成 $T(V)$ 中的乘法，因此，矢量空间 $T(V)$ 关于这种乘法成为一个代数，称为矢量空间的张量代数。

同理，V^* 的张量代数是 $T(V^*) = \sum_{r\geqslant 0} V_r^0$。

用 $\varphi(r)$ 记自然数 $\{1,\cdots,r\}$ 的置换群。设 $\sigma\in\varphi(r)$，$x\in T^r(V)$. 则定义 $\sigma x(v^{*1},\cdots,v^{*r}) = x(v^{*\sigma(1)},\cdots,v^{*\sigma(r)})$，其中 $v^{*i}\in V^*$，即 σ 的作用是把诸 $v^{*i}(1\leqslant i\leqslant r)$ 按 σ 的指定重新排列。易证，若 $x = v_1\otimes\cdots\otimes v_r$ 则 $\sigma x = v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(r)}$，其中 σ^{-1} 是 σ 的逆。

例 4 $x\in T^3(V)$，$x = v_1\otimes v_2\otimes v_3$，$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \sigma^{-1}$。则

任给 $v^{*1},v^{*2},v^{*3}\in V^*$，由定义 $\sigma x(v^{*1},v^{*2},v^{*3})=x(v^{*\sigma(1)},v^{*\sigma(2)},v^{*\sigma(3)})=x(v^{*3},v^{*2},v^{*1})=v_1(v^{*3})\cdot v_2(v^{*2})\cdot v_3(v^{*1})$，而 $v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes v_{\sigma^{-1}(2)}\otimes v_{\sigma^{-1}(3)}(v^{*1},v^{*2},v^{*3})=v_3\otimes v_2\otimes v_1(v^{*1},v^{*2},v^{*3})=v_3(v^{*1})\cdot v_2(v^{*2})\cdot v_1(v^{*3})$ 因此，$\sigma x=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes v_{\sigma^{-1}(2)}\otimes v_{\sigma^{-1}(3)}$。

定义 1.4 设 $x\in T^r(V)$，若对任意的 $\sigma\in\varphi(r)$ 都有 $\sigma x=x$，则称 x 是对称的 r 阶反变张量。若对任意的 $\sigma\in\varphi(r)$ 都有 $\sigma x=sg\ n\sigma\cdot x=\begin{cases}x & \sigma\text{ 是偶置换}\\ -x & \sigma\text{ 是奇置换。}\end{cases}$ 则称 x 是反对称的 r 阶反变张量。

下面给出对称或反对称张量的另一充要条件。

命题 1.1 $x\in T^r(V)$。则 x 是对称张量的充分必要条件是，它的分量关于各指标是对称的。x 是反对称张量的充分必要条件是，它的分量关于各指标是反对称的。

证明 取定 V 的基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，则当 x 是对称张量时，任给 $\sigma\in\varphi(r)$，$x^{i_1,\cdots,i_r}=x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})=\sigma x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})=x(e^{*i_{\sigma(1)}},\cdots,e^{*i_{\sigma(r)}})=x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}$。反之亦然。

当 x 为反对称张量时，任给 $\sigma\in\varphi(r)$，$x^{i_1,\cdots,i_r}=x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})=sg\ n\sigma\cdot\sigma x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})=sgn\sigma\cdot x(e^{*i_{\sigma(1)}},\cdots,e^{*i_{\sigma(r)}})=sg\ n\sigma\cdot x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}$ 反之亦然。

例 5 设 V 是二维矢量空间，基底是 $\{e_1,e_2\}$，$x\in T^2(V)$，则 $x=x^{11}e_1\otimes e_1+x^{12}e_1\otimes e_2+x^{21}e_2\otimes e_1+x^{22}e_2\otimes e_2$，若 x 为对称的反变张量：$x=\sigma x$，取 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则 $x^{12}=x(e^{*1},e^{*2})=\sigma x(e^{*1},e^{*2})=x(e^{*\sigma(1)},e^{*\sigma(2)})=x(e^{*2},e^{*1})=x^{21}$，因此 $x^{12}=X^{21}$。若 x 为反对称的反变张量：$x=sg\ n\sigma\cdot\sigma x$，取 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ $sg\ n\sigma=-1$，这时，$x^{12}=x(e^{*1},e^{*2})=-\sigma x(e^{*1},e^{*2})=-x(e^{*\sigma(1)},e^{*\sigma(2)})=-x(e^{*2},e^{*1})=-x^{21}$。因此 $x^{12}=-x^{21}$。而 $x^{11}=x(e^{*1},e^{*1})=-$

$\sigma x(e^{*1},e^{*1}) = -x(e^{*1},e^{*1}) = -x^{11}$。 $\therefore x^{11}=0$。(注意:$-\sigma x(e^{*1},e^{*1}) \neq -x(e^{*2},e^{*2})$)

任何一个张量都可以对称化或反对称化。事实上,对 $x \in T^r(V)$,若定义对称化算子 $S_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} \sigma x$ 和反对称化算子 $A_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} sgn\sigma\cdot\sigma x$,则 x 在以上两个算子的作用下成为对称张量或反对称张量,即有以下的定理:

定理 1.2 设 $P^r(V)$ 为全体对称的 r 阶反变张量的集合,$\Lambda^r(V)$ 为全体反对称的 r 阶反变张量的集合。则

$$P^r(V) = S_r(T^r(V)), \Lambda^r(V) = A_r(T^r(V))。$$

证明 首先,若 $x \in T^r(V)$,则对任意的 $\tau\in\varphi(r)$ 有:$\tau(S_r(x)) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} \tau\circ\sigma x = S_r(x)$ 因此,$S_r(x) \in P^r(V)$ 即 $S_r(T^r(V)) \subset P^r(V)$。又:

$\tau(A_r(x)) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} sgn\sigma\cdot\tau\circ\sigma x = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} sgn\tau\cdot sg\ n(\tau\circ\sigma)\cdot\tau\circ\sigma(x) = sgn\tau\cdot\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} sgn(\tau\circ\sigma)\tau\circ\sigma(x) = sgn\tau\cdot A_r(x)$。因此,$A_r(x) \in \Lambda^r(V)$ 即 $A_r(T^r(V)) \subset \Lambda^r(V)$

另一方面,容易证明,对称张量在对称化算子作用下不变,反对称张量在反对称化算子作用下不变。因此,$P^r(V) = S_r(T^r(V))$,$\Lambda^r(V) = A_r(T^r(V))$。 证毕。

以上关于对称张量和反对称张量的讨论同样可用于协变张量,全体对称的 r 阶协变张量的集合记作 $P^r(V^*)$,全体反对称的 r 阶协变张量的集合记作 $\Lambda^r(V^*)$。

4.2 外代数

反对称的 r 阶反变张量称为外 r 次矢量,空间 $\Lambda^r(V)$ 称为 V

上的外 r 次矢量空间，约定 $\wedge^1(V)=V,\wedge^0(V)=F$，容易知道两个外矢量的张量积不一定是外矢量，但利用反对称化算子 A_r 就可使之反对称化，因此有外积运算“$\wedge$”。

定义 2.1 设 ξ 是外 k 次矢量，η 是外 l 次矢量。命

$$\xi\wedge\eta=A_{k+l}(\xi\otimes\eta)=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\varphi(k+l)}sg\,n\sigma\cdot\sigma(\xi\otimes\eta)$$

可见 $\xi\wedge\eta$ 是反对称的$(k+l)$阶反变张量，即外$(k+l)$次矢量。

定理 2.1 外积“$\wedge$”适合下列运算规律，设 $\xi,\xi_1,\xi_2\in\wedge^k(V),\eta,\eta_1,\eta_2\in\wedge^l(V),\xi\in\wedge^h(V)$，则：

① 分配律：$(\xi_1+\xi_2)\wedge\eta=\xi_1\wedge\eta+\xi_2\wedge\eta,\xi\wedge(\eta_1+\eta_2)=\xi\wedge\eta_1+\xi\wedge\eta_2$。

② 反交换律：$\xi\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\xi$。

③ 结合律：$(\xi\wedge\eta)\wedge\xi=\xi\wedge(\eta\wedge\xi)$。

证明 ① 由于张量积和反对称化算子 A_{k+l} 都是线性的，故分配律显然成立。

② 因 $\xi\wedge\eta$ 是反对称张量。对任意的 $\tau\in\varphi(k+l)$有：$\tau(\xi\wedge\eta)=sg\,n\tau\cdot\xi\wedge\eta$ 因此，$\xi\wedge\eta=sg\,n\tau\cdot\tau(\xi\wedge\eta)$。取

$$\tau=\begin{pmatrix}1&\cdots&k&k+1&\cdots&k+l\\ l+1&\cdots&l+k&1&\cdots&l\end{pmatrix}$$

则 $sg\,n\tau=(-1)^{kl}$。对任意的 $v^{*1},\cdots,v^{*k+l}\in V^*$ 有

$$\xi\wedge\eta(v^{*1},\cdots,v^{*k+l})=(-1)^{kl}\cdot\xi\wedge\eta(v^{*\tau(1)},\cdots,v^{*\tau(k+l)})$$

$$=\frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\varphi(k+l)}sgn\sigma\cdot\sigma(\xi\otimes\eta)(v^{*\tau(1)},\cdots,v^{*\tau(k+l)})$$

$$=\frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\varphi(k+l)}sgn\sigma\cdot\sigma\circ\xi(v^{*\tau(1)},\cdots,v^{*\tau(k)})\cdot\sigma\cdot\eta(v^{*\tau(k+1)},\cdots,v^{*\tau(k+l)})$$

$$=\frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\varphi(k+l)}sgn\sigma\cdot\xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)},\cdots,v^{*\sigma\circ\tau(k)})\cdot\eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)},$$

$\cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l)})$

$= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!} \sum_{\sigma\in\varphi(k+l)} sgn\sigma \cdot \eta(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(l)}) \cdot \xi(v^{*\sigma(l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(l+k)})$

$= (-1)^{kl}\eta \wedge \xi(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l})$故有 $\xi \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \xi$。

③ 设 $v^{*1}, \cdots, v^{*k}, v^{*k+l}, \cdots, v^{*k+l}, v^{*k+l+1}, \cdots, v^{*k+l+h} \in V^*$则$(\xi \wedge \eta) \wedge \xi(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l+h})$

$= \frac{1}{(k+l+h)!} \sum_{\sigma\in\varphi(k+l+h)} sgn\sigma \cdot \sigma[(\frac{1}{(k+l)!} \sum_{\tau\in\varphi(k+l)} sgn\tau \cdot \tau(\xi \otimes \eta)) \otimes \xi](v^{*1}, \cdots, v^{*k+l+h})$

$= \frac{1}{(k+l+h)!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma\in\varphi(k+l+h)} \sum_{\tau\in\varphi(k+l)} sgn\sigma \cdot sgn\tau \cdot \sigma\circ\tau(\xi \otimes \eta \otimes \xi)(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l+h})$

$= \frac{1}{(k+l+h)!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma\in\varphi(k+l+h)} \sum_{\tau\in\varphi(k+l)} sgn\sigma \cdot sgn\tau \xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k)}) \cdot \eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l)}) \cdot \xi(v^{*\sigma\circ\tau(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l+h)})$

$= \frac{1}{(k+l+h)!} \sum_{\sigma\in\varphi(k+l+h)} sgn\sigma \cdot \xi(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(k)}) \cdot \eta(v^{*\sigma(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l)}) \cdot \xi(v^{*\sigma(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l+h)})$

注意,最后一步"$\sum$"求和写开后,每一项 $sgn\sigma \cdot sgn\tau\xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k)}) \cdot \eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l)}) \cdot \xi(v^{*\sigma\circ\tau(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l+h)})$都恰有$(k+l)!$ 项是相同的,等于

$sgn\sigma \cdot \xi(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(k)}) \cdot \eta(v^{*\sigma(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l)}) \cdot \xi(v^{*\sigma(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l+h)})$。因此,

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \xi = A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \xi)。$$

同理，$\xi\wedge(\eta\wedge\xi)=A_{k+l+h}(\xi\otimes\eta\otimes\xi)$。结合律成立。

证毕。

推论 2.1 ① 若 $\xi,\eta\in V=\wedge^1(V)$，则 $\xi\wedge\eta=-\eta\wedge\xi$。$\xi\wedge\xi=\eta\wedge\eta=0$，一般地，如果一个外积多项式含有两个相同一次因子必为零。

② 若 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基底，则 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=A_r(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r})(1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n)$，只有当 $i_1,\cdots,i_r$ 互不相同时，$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ 才不为零，而 $r>n$ 时，指标 $i_1,\cdots,i_r$ 必有重复者，故 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=0$。

③ 设 $\xi\in\wedge^r(V)$ 且 $\xi=\xi^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}$，则：$\xi=A_r\xi=\xi^{i_1\cdots i_r}A_r(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r})=\xi^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$。

可见，次数大于 n 的外矢量都是零，即 $\wedge^r(V)=0\quad(r>n)$。而当 $r\leqslant n$ 时，$\xi=r!\sum\limits_{i_1<\cdots<i_r}\xi^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$，这是由于 $\xi^{i_1\cdots i_r}$ 关于上指标反对称的缘故。

例 1 $\xi\in\wedge^r(V)$，V 的基底为 $\{e_1,e_2,e_3\}$

$$\xi=x^{12}e_1\wedge e_2+x^{13}e_1\wedge e_3+x^{21}e_2\wedge e_1+x^{23}e_2\wedge e_3+x^{31}e_3\wedge e_1+x^{32}e_3\wedge e_2$$

$$=x^{12}e_1\wedge e_2+x^{13}e_1\wedge e_3+(-x^{12})(-1)e_1\wedge e_2+x^{23}e_2\wedge e_3+(-x^{13})(-1)e_1\wedge e_3+(-x^{23})(-1)e_2\wedge e_3$$

$$=2(x^{12}e_1\wedge e_2+x^{13}e_1\wedge e_3+x^{23}e_2\wedge e_3)=2!\sum_{i_1<i_2}\xi^{i_1i_2}e_{i_1}\wedge e_{i_2}$$

命题 2.1 设 $v^{*1},\cdots,v^{*r}$ 是 V^* 中任意 r 个元素，则

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(v^{*1},\cdots,v^{*r})=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}sgn\sigma\cdot<e_{i_1},v^{*\sigma(1)}>\cdot\cdots\cdot<e_{i_r},v^{*\sigma(r)}>$$

$$
=\frac{1}{r!}\begin{vmatrix} \langle e_{i_1}, v^{*1}\rangle & \cdots & \langle e_{i_1}, v^{*r}\rangle \\ \langle e_{i_2}, v^{*1}\rangle & \cdots & \langle e_{i_2}, v^{*r}\rangle \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \langle e_{i_r}, v^{*1}\rangle & \cdots & \langle e_{i_r}, v^{*r}\rangle \end{vmatrix}
$$

上式称为 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ 的求值公式。

特别地，$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(e^{*j_1}\wedge\cdots\wedge e^{*j_r})=\frac{1}{r!}det(\langle e_{i_\alpha}, e^{*j_\beta}\rangle)$

$$
=\frac{1}{r!}\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}
$$

其中

$$
\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}=\begin{cases} 1 & \text{当 } i_1\cdots i_r \text{ 互不相同且}\{j_1\cdots j_r\}\text{是}\{i_1\cdots i_r\}\text{的偶排列时} \\ -1 & \text{当 } i_1\cdots i_r \text{ 互不相同且}\{j_1\cdots j_r\}\text{是}\{i_1\cdots i_r\}\text{的奇排列时} \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}
$$

称为广义的 Kronecker 符号

命题 2.2 当 $r\leqslant n$ 时，$\wedge^r(V)$ 的基底是 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}, 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$。

证明 若 $r=n$，$e_1\wedge\cdots\wedge e_n(e^{*1},\cdots e^{*n})=\frac{1}{n!}\neq 0$ 因此，$e_1\wedge\cdots\wedge e_n\neq 0$，对于 $r<n$，如果 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}, 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 线性相关，则有不全为零的数量 $\alpha^{i_1\cdots i_r}\in F$ 使

$$
\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\alpha^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=0
$$

不妨设其中一个不为零的数量是 $\alpha^{j_1\cdots j_r}$。$1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$。假定与它相补的指标组是 $k_1<\cdots<k_{n-r}$，即是说 $\{j_1,\cdots,j_r,k_1,\cdots,k_{n-r}\}$ 是 $\{1,\cdots,n\}$ 的一个排列。用 $e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{n-r}}$ 乘上式的两端：$\alpha^{j_1\cdots j_r}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_r}\wedge e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{n-r}}=\pm\alpha^{j_1\cdots j_r}e_1\wedge\cdots\wedge e_n=0$ 所以 $\alpha^{j_1\cdots j_r}=0$，矛盾。因此 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}, 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 是线性无关的。它们构成 $\wedge^r(V)$ 的基底。外矢量空间 $\wedge^r(V)$ 的维数是

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

例 2 设矢量空间 V 的基底是 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 则 $\wedge^2(V)$ 的基底是 $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$ 为 $C_3^2 = 3$ 维矢量空间。$\wedge^3(V)$ 的基底是 $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$，是 $C_3^3 = 1$ 维矢量空间。

定义 2.2 用 $\wedge(V)$ 表示 $\wedge^r(V)(r = 0, 1, \cdots, n)$ 的直和：

$\wedge(V) = \sum_{r=0}^{n} \wedge^r(V) = \wedge^0(V) \otimes \cdots \otimes \wedge^n(V)$，则 $\wedge(V)$ 是 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ 维矢量空间。$\wedge(V)$ 中任何一个元素 w 可唯一地表示成 $w = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$，其中 $w_i \in \wedge^i(V)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 设 $\xi = \sum_{r=0}^{n} \xi^r$，$\eta = \sum_{s=0}^{n} \eta^s$，命 ξ 和 η 的外积是

$\xi \wedge \eta = \sum_{r,s=0}^{n} \xi^r \wedge \eta^s = \xi^0 \wedge \eta^0 + \xi^0 \wedge \eta^1 + \cdots + \xi^0 \wedge \eta^n + \cdots + \xi^n \wedge \eta^0 + \xi^n \wedge \eta^1 + \cdots + \xi^n \wedge \eta^n$。则 $\wedge(V)$ 关于外积成为一个代数，称为矢量空间 V 的代数或 Crassmann 代数。

矢量空间 $\wedge(V)$ 的基底是 $\{1, e_i(1 \leqslant i \leqslant n), e_{i_1} \wedge e_{i_2}(1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n), \cdots, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\}$。

例 3 设 V 是 R 上的三维矢量空间，$\{e_1, e_2, e_3\}$ 是基底，则 $\wedge(V) = \wedge^0(V) \otimes \wedge^1(V) \otimes \wedge^2(V) \otimes \wedge^3(V)$。基底为 $\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$ 是 8 维向量空间。

同样，我们有对偶空间 V^* 的外代数：

$$\wedge(V^*) = \sum_{r=0}^{n} \wedge^r(V^*)$$

$\wedge^r(V^*)$ 的元素称为矢量空间 V 上的 r 次外形式，这 在下一章外微分形式中要用。

设 $F: V \to W$ 是从矢量空间 V 到 W 的线性映射，则 F 诱导出外形式空间 $\wedge^r(W^*)$ 到 $\wedge^r(V^*)$ 的线性映射 F^*：设 $\varphi \in \wedge^r(W^*)$ 对任意的 $(V_1, \cdots, V_r) \in V$，命

$$F^*\varphi(V_1,\cdots,V_r)=\varphi(F(V_1),\cdots,F(V_r))$$

则容易证明 F^* 是线性的，并且 F^* 和外积运算是可交换的，即有

定理 2.2　设 $F:V\to W$ 是线性映射，则对任意的 $\varphi\in\wedge^r(W^*)$ 和 $\psi\in\wedge^s(W^*)$ 有：$F^*(\varphi\wedge\psi)=F^*\varphi\wedge F^*\psi$

证明　注意到 $F^*(\varphi\wedge\psi)$ 是 $\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r+s个}$ 上的线性函数，对任意的 $v_1,\cdots,v_{r+s}\in V$，则按定义

$F^*(\varphi\wedge\psi)=\varphi\wedge\psi(F(v_1),\cdots,F(v_{r+s}))$

$=\frac{1}{(r+s)!}\sum\limits_{\sigma\in\varphi(r+s)} sgn\sigma\cdot\varphi(F(v_{\sigma(1)},\cdots,F(v_{\sigma(r)})\cdot\psi(F(v_{\sigma(r+1)}),\cdots,F(v_{\sigma(r+s)}))$

$=\frac{1}{(r+s)!}\sum\limits_{\sigma\in\varphi(r+s)} sgn\sigma\cdot F^*\varphi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})\cdot F^*\psi(v_{\sigma(r+1)}),\cdots,v_{\sigma(r+s)}))$

$=F^*\varphi\wedge F^*\psi(v_1,\cdots,v_{r+s})$，因此 $F^*(\varphi\wedge\psi)=F^*\varphi\wedge F^*\psi$。这里 $F^*\varphi\in\wedge^r(v^*)$，$F^*\psi\in\wedge^s(v^*)$。

外代数与行列式的密切关系还表现在下面的命题。

命题 2.3　设 $v_1,\cdots,v_k\in V$，$w_1,\cdots,w_k$ 为它们的线性组合：$w_k=\sum\limits_{\beta=1}^{n}t_\alpha^\beta v_\beta$，则 $w_1\wedge\cdots\wedge w_k=d\,et(t_\alpha^\beta)v_1\wedge\cdots\wedge v_k$。

我们举下例来说明这个命题的正确性。

例 4　设

$$\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1^1 & t_1^2\\t_2^1 & t_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\quad 则$$

$w_1\wedge w_2=(t_1^1v_1+t_1^2v_2)\wedge(t_2^1v_1+t_2^2v_2)=(t_1^1t_2^2-t_1^2t_2^1)v_1\wedge v_2$

$=\begin{vmatrix}t_1^1 & t_1^2\\t_2^1 & t_2^2\end{vmatrix}v_1\wedge v_2$。可见，两个外矢量只差一个行列式因子。

命题 2.4　设 V 的基底为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，$v_1,\cdots,v_p\in V$ 且

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} t_i^j e_j \quad (i = 1, \cdots, p)$$

则

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \begin{vmatrix} t_1^{i_1} & \cdots & t_p^{i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_p^{i_1} & \cdots & t_p^{i_p} \end{vmatrix} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

证明 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{n} t_1^{i_1} \cdots t_p^{i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$

这说明 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \in \wedge^p(V)$，但 $\wedge^p(V)$ 的基底是

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$$

因此，必需把上式求和项中不为零的任意次序的外积 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ 变成标准次序外积 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$，$(i_1 < \cdots < i_p)$。因而我们在计算和式 $\sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{n}$ 时应先从 $(1, \cdots, n)$ 中任选 p 个数：$i_1 < \cdots < i_p$，再把这 p 个数任意排列，因此

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_p &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \left(\sum_{\sigma \in \varphi(p)} sgn\sigma \cdot t_1^{i_1} \cdots t_p^{i_p} \right) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \begin{vmatrix} t_1^{i_1} & \cdots & t_1^{i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_p^{i_1} & \cdots & t_p^{i_p} \end{vmatrix} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \end{aligned}$$

即求和项中行列式的取法是从矩阵：

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & \cdots & t_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_p^1 & \cdots & t_p^n \end{pmatrix} \quad \text{中依列}$$

的顺序任取出 p 阶行列式，共取出 C_n^p 个行列式。

例 5 V 的基底为 $\{e_1, e_2, e_3\}$，$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$

则 $v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 + \begin{vmatrix} t_1^1 & t_1^3 \\ t_2^1 & t_2^3 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^2 & t_2^3 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \begin{vmatrix} t_1^{i_1} & t_1^{i_2} \\ t_2^{i_1} & t_2^{i_2} \end{vmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2}。$$

以下讨论几个很有用的命题。

命题 2.5　V 中矢量 $v_1, \cdots, v_p$ 线性无关的充分必要条件是 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$

证明　充分性。若 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$,由命题 2.4,矩阵 $(t_i^j)(i = 1, \cdots, p, j = 1, \cdots, n)$ 中有一个 p 阶子式:

$$\begin{vmatrix} t_1^{i_1} & \cdots & t_1^{i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_p^{i_1} & \cdots & t_p^{i_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

即矩阵 (t_i^j) 的秩为 p,这说明 $v_1, \cdots, v_p$ 线性无关。

必要性。基 $v_1, \cdots, v_p$ 线性无关,则矩阵 $(t_i^j)(i = 1, \cdots, p, j = 1, \cdots, n)$ 秩为 p,故总有一个上述的 p 阶行列式不为零,因此,$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$

命题 2.6　若 $w_1, \cdots, w_n$ 是 V 的另一组基底,且 $w_i = \sum_{j=1}^{n} t_i^j e_j$ $(i = 1, \cdots, n)$ 则 $w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = det(t_i^j) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$。

这是命题 2.4 的直接推论。

定义 2.3　若命题 2.6 中 $det(t_i^j) > 0$,则说 V 的两组基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 和 $\{w_1, \cdots, w_n\}$ 的定向是相同的,或称 $\{e_i\}$ 和 $\{w_j\}$ 这两个基底是等价的,并称它们属于同一等价类。

显然,矢量空间 V 有且只有两个等价类。所谓定向的矢量空间是指带有一个等价类的矢量空间。

定理 2.3 (Cartan 引理)设 $v_1,\cdots,v_r;w_1,\cdots,w_r$ 是 V 中的两组矢量,使得 $\sum\limits_{\alpha=1}^{r} v_\alpha \wedge w_\alpha = 0$,若 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关,则 w_α 可表为 $v_1,\cdots,v_r$ 的线性组合($\alpha=1,\cdots,r$)且表示的矩阵为对称矩阵。

证明 因为 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关,可扩充为 V 的基底:

$\{v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n\}$,设 $w_\alpha = \sum\limits_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}v_\beta + \sum\limits_{\mu=r+1}^{n} a_\mu v_\mu$,由假设

$$0 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}v_\alpha \wedge v_\beta + \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\mu=r+1}^{n} a_{\alpha\mu}v_\alpha \wedge v_\mu$$

$$= \sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant r} (a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha})v_\alpha \wedge v_\beta + \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\mu=r+1}^{n} a_{\alpha\mu}v_\alpha \wedge v_\mu$$

由于 $\{v_i \wedge v_j, 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 是 $\wedge^2(V)$ 的基底,故 $a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}=0$,且 $a_{\alpha\mu}=0$。因此,$w_\alpha = \sum\limits_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}v_\beta$ 且 $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$,即表示矩阵是对称矩阵。证毕。

§5 光滑张量场及其 Lie 导数

设 M 是 m 维光滑流形,M 在点 x 的 (p,q) 型张量空间

$$T_q^p(x) = \underbrace{T_xM\otimes\cdots\otimes T_xM}_{p}\otimes\underbrace{T_x^*M\otimes\cdots\otimes T_x^*M}_{q}$$

$$= L(\underbrace{T_x^*M\times\cdots\times T_*M}_{p}\times\underbrace{T_xM\times\cdots\times T_xM}_{q};R)$$

记 $T_q^p(M) = \bigcup\limits_{x\in M} T_q^p(x)$

定义 1 光滑流形 M 上的一个 (p,q) 型张量场 τ 是指映射

$$\tau: M\to T_q^p(M)$$

$$x\to\tau(x)\in T_q^p(x)$$

张量场 τ 称为光滑的,如果对 $\forall x\in M$,存在 M 在 x 的局部坐标系 (U,x^i),使 τ 的局部表达式

$$\tau\Big|_U = \tau^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_q}$$

的系数 $\tau^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\in C^\infty(U)$。

M 上(p,q)型光滑张量场的全体记为 $\tau^p_q(M)$，特别地，M 上光滑的(1,0)型张量场就是 M 上的光滑向量场，于是 $\tau^1_0(M)=\mathscr{X}(M)$

例 1 M 上光滑函数$f\in C^\infty(M)$的微分 df 是光滑的(0,1)型张量场。事实上，$\forall\, x\in M$，设(U,x^i)是局部坐标系，则

$$df\Big|_U = df(\frac{\partial}{\partial x^i})\,dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

由于$\frac{\partial f}{\partial x^i}\in C^\infty(U)$，所以 $df\in\tau^0_1(M)$.

记 $A^1(M)=\tau^0_1(M)$

例 2 光滑流形 M 上每点的切空间上的恒同映射 $id: T_xM\to T_xM$，$x\in M$ 给出了流形 M 上的一个光滑的(1,1)型张量场 τ，τ 定义为

$$\tau(x)(\alpha,X)=\alpha(idX)=\alpha(X),\quad \forall\,(\alpha,X)\in T^*_xM\times T_xM$$

显然 $\tau(x)\in T^1_1(x)$(它是二重线性函数)，又因

$$\tau(x)(dx^i\Big|_x\ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x)=dx^i(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x)=\delta^i_j$$

$$\tau(x)=\delta^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\otimes dx^i\Big|_x=\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\otimes dx^i\Big|_x$$

所以 $\tau(x)$的系数为 δ^i_j(常数)，可见 $\tau\in T^1_1(M)$。

例 3 若在光滑流形 M 上每点 x 的切空间 T_xM 上给定一个线性变换 $A(x): T_xM\to T_xM$，则在 M 上给出了一个(1,1)型张量场 A，A 的定义是

$$A(x)(\alpha, X) = \alpha(A(x)X)$$

因为 $A(x)$是 $T_x^*M \times T_xM$ 上双线性函数，所以 $A(x) \in T_1^1(x)$。

若取 $x \in M$ 的局部坐标系(U, x^i)，则可令

$$A(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x = a_j^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x$$

$$A(x)\left(dx^i\bigg|_x \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right) = dx^i\left(A(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right) = a_j^i(x)$$

$$A(x) = a_j^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x \otimes dx^j\bigg|_x$$

一般说来，A 不是光滑的，除非 a_j^i 在每个 U 上光滑。

定义 2 映射

$$\tau: \underbrace{A^1(M) \times \cdots \times A^1(M)}_{p} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)}_{q} \to C^\infty(M)$$

称为 $p+q$ 重 $C^\infty(M)$线性的，如果对 $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $Y_i \in \mathscr{X}(M)$, $\beta^j \in A^1(M)$，

$$\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^{i-1}, f\alpha^i + g\beta^i, \alpha^{i+1}, \cdots, \alpha^p, X_1, \cdots, X_q)$$
$$= f\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, X_1, \cdots, X_q) + g\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^{i-1}, \beta^i, \alpha^{i+1}, \cdots, \alpha^p, X_1, \cdots, X_q)$$

$l \leqslant i \leqslant p$

$$\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, X_1, \cdots, X_{j-1}, fX_j + gY_j, X_{j+1}, \cdots, X_q)$$
$$= f\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, X_1, \cdots, X_q) + g\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, X_1, \cdots, X_{j-1}, Y_j, X_{j+1}, \cdots, X_q)$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant q$。

定理 1 $p+q$ 重 $C^\infty(M)$线性映射

$$\tau: \underbrace{A^1(M) \times \cdots \times A^1(M)}_{p} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)}_{q} \to C^\infty(M)$$

在 M 上指定了一个(p, q)型张量场。

证明　只须证明$(p,q)=(0,1)$的情形,其他情形的证明类似。设有 $C^\infty(M)$线性映射

$$\tau:\mathscr{X}(M)\to C^\infty(M)$$

定义 $\tau(x)$如下:

$$\tau(x)(X_x)=(\tau(X))(x),\ \forall\, x\in M$$

(1)先证明 $\tau(x)$的定义与 X 的选取无关,只与 X 在 x 的值 X_x 有关。

设 $Y\in\mathscr{X}(M)$,使 $Y|_U=X|_U$,其中 U 为 x 的某个邻域,任取 $x_0\in U$,则有的 x_0 的邻域 V,使 $x_0\in V\subset\bar{V}\subset U$ 且 $\bar{V}$ 紧致,于是存在函数 $f\in C^\infty(M)$,使 $f|_V\equiv1,f|_{M\setminus U}\equiv0$,于是

$$f(Y-X)\equiv0$$

由于 $\tau(0)=\tau(0,0)=0\tau(0)=0$,所以

$$0=\tau(f(Y-X))=f\,\tau(Y-X)$$

$\tau(Y)|_V=\tau(X)|_V$,特别地 $\tau(Y)(x_0)=\tau(X)(x_0)$,由 x_0 的任意性

$$\tau(Y)\Big|_U=\tau(X)\Big|_U$$

设(U,x^i)为局部坐标系,那么,由上述证明,$\tau(\frac{\partial}{\partial x^i})$是确定的局部光滑函数。令

$$\tau(X)\Big|_U=\xi^i\tau(\frac{\partial}{\partial x^i})$$

$$\tau(X)(x)=\xi^i(x)\ \tau(\frac{\partial}{\partial x^i})(x)$$

所以 $\tau(X)(x)$的值由 $\xi^i(x)$的值,亦即 X_x 的值唯一确定。

(2)任取 $x_0\in M$, $\forall\, x_0\in T_{x_0}M$,存在 $X\in\mathscr{X}(M)$,使 $X_{x_0}=X_0$,于是

$$\tau(x_0)(X_0)=(\tau(X))(x_0)$$

且 $\tau(x_0)$为 $T_{x_0}M$ 上的线性函数,故 $\tau(x_0)\in T^*_{x_0}M$,即 $\tau\in T^0_1(M)$

在 x 的坐标邻域(U, x^i)下，$\tau(x_0)=\tau(x_0)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}\right)\left.dx^i\right|_{x_0}$

$=\tau\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(x_0)\right)\left.dx^i\right|_{x_0}$

其中 $x_0 \in U$，所以有

$$\left.\tau\right|_U=\tau\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)dx^i$$

又由于 $\tau\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in C^\infty(U)$，所以 τ 是光滑的，证毕。

设 X 是光滑流形 M 上的光滑向量场，φ_t 是 X 在开集 U 上诱导的局部单参数可微变换群，$x \in U$，φ_t 过 x 的轨道 $\gamma_x(t)=\varphi_t(x)$，由于 $\varphi_t: U \to \varphi_t(U)$是微分同胚，故$(\varphi_t^{-1})_*: T_{\varphi_t(x)}M \to T_xM$ 及 $\varphi_t^*: T^*_{\varphi_t(x)}M \to T^*_xM$ 都是线性同构，定义线性同构

$$\Phi_t: T^p_q(\varphi_t(x)) \to T^p_q(x)$$

如下：

对 $\forall \tau(\gamma_x(t)) \in T^p_q(\gamma_x(t))$，$|t|<\varepsilon$（取 ε 充分小，使 $\gamma_x(t) \in U$），令

$\Phi_t(\tau(\gamma_x(t)))(\alpha^1(x), \cdots, \alpha^p(x), X_1(x), \cdots, X_q(x))$

$=\tau(\gamma_x(t))((\varphi_t^{-1})^*\alpha^1(x), \cdots, (\varphi_t^{-1})^*\alpha^p(x), (\varphi_t)_*X_1(x), \cdots, (\varphi_t)_*X_q(x))$，

其中

$(\alpha^1(x), \cdots, \alpha^p(x), X_1(x), \cdots, X_q(x)) \in \underbrace{T^*_xM \times \cdots \times T^*_xM}_{p} \times \underbrace{T_xM \times \cdots \times T_xM}_{p}$。

则 $\Phi_t(\tau(\gamma_x(t))) \in T^p_q(x)$且是由 $\tau(\gamma_x(t))$唯一确定的。命

$$(\Phi_t\tau)(x)=\Phi_t(\tau(\gamma_x(t)))。$$

定义 3　设 X 是 M 上光滑向量场，φ_t 是 X 诱导的局部单参群。τ 为 M 上光滑的 (p,q) 型张量场，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\Phi_t\tau)(x)-\tau(x)}{t}$$

称为 τ 沿 X 的在点 x 的李导数，记为 $(L_X\tau)(x)$。

定理 2　李导数 L_X 具有下列运算性质

(1)　L_X 是线性的，即对 $\forall\, \tau_1,\tau_2\in\tau_q^p(M)\lambda\in R$，有

$$L_X(\tau_1+\lambda\tau_2)=L_X\tau_1+\lambda L_X\tau_2;$$

(2)　设 $\tau_1\in\tau_s^r(M)$，$\tau_2\in\tau_q^p(M)$，则

$$L_X(\tau_1\otimes\tau_2)=L_X\tau_1\otimes\tau_2+\tau_1\otimes L_X\tau_2。$$

证明　由 Φ_t 的线性性及定义 3 就可直接得性质(1)，又由 Φ_t 的定义不难看出

$$(\Phi_t(\tau_1\otimes\tau_2))(x)=(\Phi_t\tau_1)(x)\otimes(\Phi_t\tau_2)(x),$$

所以有

$$(L_X(\tau_1\otimes\tau_2))(x)=\lim_{t\to 0}\frac{(\Phi_t(\tau_1\otimes\tau_2))(x)-(\tau_1\otimes\tau_2)(x)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{(\Phi_t\tau_1)(x)-\tau_1(x)}{t}\otimes(\Phi_t(\tau_2))(x)+\frac{\tau_1(x)\otimes(\Phi_t(\tau_2)(x)-\tau_2(x))}{t}\right\}$$

$$=(L_X\tau_1)(x)\otimes\tau_2(x)+\tau_1(x)\otimes(L_X\tau_2)(x)。$$

例 2　设 $\omega\in A^1$，$X\in\mathscr{X}(M)$，$Y\in\mathscr{X}(M)$，则有

$$(L_X\omega)(Y)=X(\omega(X))-\omega([X,Y])。$$

证明　设 X 诱导的局部单参数 φ_t，则

$$(\Phi_t\omega)(x)=\Phi_t\omega(\varphi_t(x))=\varphi_t^*\omega(\varphi_t(x)),$$

$$(L_X\omega)(x)=\lim_{t\to 0}\frac{(\Phi_t\omega)(x)-\omega(x)}{t},$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega(\varphi_t(x))-\omega(x)}{t},$$

$$((L_X\omega)(Y))(x)=(L_X\omega)(x)(Y_x)=\lim_{t\to0}\frac{(\varphi_t^*\omega(\varphi_t(x))(Y_x)-\omega(x)(Y_x)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(\varphi_t^*\omega(\varphi_t(x))(Y_x-(\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(x)})}{t}$$

$$+\lim_{t\to0}\frac{\omega(\varphi_t(x))(Y\varphi_t(x))-\omega(x)(Y_x)}{t}$$

$$=-(\omega(L_XY)(x)+\lim_{t\to0}\frac{(\omega(Y))(\varphi_t(x))-(\omega(Y)(x)}{t}$$

$$=-(\omega(L_XY))(x)+(X(\omega(Y)))(x)。$$

更一般地，有

定理 3 设 $X\in\mathscr{X}(M)$，$\alpha\in\tau_r^0(M)$，则对 $\forall X_1,\cdots,X_r\in\mathscr{X}(M)$有

$$(L_X\alpha)(X_1,\cdots,X_r)=X(\alpha(X_1,\cdots,X_r))-\sum_{i=1}^{r}\alpha(X_1,\cdots,[X,X_i],\cdots,X_r)$$

证明 $\forall x\in M$，设 X 在 x 的邻域内诱导的单参数为 φ_t，φ_t 诱导的线性同构为 $\Phi_t:T_\gamma^0(\varphi_t(x))\longrightarrow T_\gamma^0(x)$于是有

$$(\Phi_t\alpha)(x)(X_1(x),\cdots,X_\gamma(x))-\alpha(x)(X_1(x),\cdots,X_r(x))$$
$$=(\Phi_t\alpha)(x)(X_1(x)-(\varphi_t^{-1})_*X_1(\varphi_t(x)),X_2(x),\cdots,X_r(x))$$
$$+(\Phi_t\alpha)(x)((\varphi_t^{-1})_*X_1(\varphi_t(x)),X_2(x),\cdots,X_r(x))$$
$$-\alpha(x)(X_1(x),\cdots,X_r(x))$$
$$=(\Phi_t\alpha)(x)(X_1(x)-(\varphi_t^{-1})_*X_1(\varphi_t(x)),X_2(x),\cdots,X_r(x))$$
$$+(\Phi_t\alpha)(x)((\varphi_t^{-1})_*X_1(\varphi_t(x)),X_2(x)-(\varphi_t^{-1})_*X_2(\varphi_t(x)),X_3(x),\cdots,X_r(x))-\alpha(x)(X_1(x),\cdots,X_r(x))$$
$$=\cdots$$
$$=(\Phi_t\alpha)(x)(X_1(x)-(\varphi_t^{-1})_*X_1(\varphi_t(x),X_2(x),\cdots,X_r(x))$$
$$+(\Phi_t\alpha)(x)((\varphi_t^{-1})_*X_1(\varphi_t(x)),X_2(x)-(\varphi_t^{-1})_*X_2(\varphi_t$$

$(x)), X_3(x), \cdots, X_r(x))$

$$+\cdots$$

$$+(\Phi_t\alpha)(x)((\varphi_t^{-1})_* X_1(\varphi_t(x)), \cdots, X_r(x)-(\varphi_t^{-1})_* X_r$$

$(\varphi_t(x))$

$$+(\Phi_t\alpha)(x)((\varphi_t^{-1})_* X_1(\varphi_t(x)), \cdots, (\varphi_t^{-1})_* X_r(\varphi_t(x))$$

$$-\alpha(x)(X_1(x), \cdots, X_r(x))$$

注意到$\lim\limits_{t\to 0}(\varphi_t^{-1})_* = id: T_x(M)\to T_xM$，是恒同映射，所以$\lim\limits_{t\to 0}\Phi_t =$ $\Phi_0: T_r^o(x)\to T_r^o(x)$也是恒同映射，再注意到

$$(\Phi_t\alpha)(x)((\varphi_t^{-1})_* X_1(\varphi_t(x)), \cdots, (\varphi_t^{-1})_* X_r(\varphi_t(x)))-\alpha$$

$(x)(X_1(x), \cdots, X_r(x))$

$$=(\Phi_t\alpha(\varphi_t(x)))((\varphi_t^{-1})_* X_1(\varphi_t(x), \cdots, (\varphi_t^{-1})_* X_r(\varphi_t(x)))$$

$-\alpha(x)(X_1(x), \cdots, X_r(x))$

$$=\alpha(\varphi_t(x))(X_1(\varphi_t(x)), \cdots, X_r(\varphi_t(x)))-\alpha(x)(X_1(x), \cdots,$$

$X_r(x))$

$$=(\alpha(X_1, \cdots, X_r))(\varphi_t(x))-(\alpha(X_1, \cdots, X_r))(x)$$

$$=(\varphi_t^*(\alpha(X_1, \cdots, X_r)))(x)-(\alpha(X_1, \cdots, X_\gamma))(x),$$

而且由函数 $\alpha(X_1, \cdots, X_r)$沿 X 在 x 的李导数的定义

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^*(\alpha(X_1, \cdots, X_r)))(x)-(\alpha(X_1, \cdots, X_r))(x)}{t}$$

$$=(L_x(\alpha(X_1, \cdots, X_r)))(x)=X_x\alpha(X_1, \cdots, X_r)$$

所以有

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{(\Phi_t\alpha)(x)-\alpha(x)}{t}\right)(X_1(x), \cdots, X_r(x))$$

$$=-\sum_{i=1}^{r}(\alpha(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_r))(x)+X_x\alpha(X_1, \cdots, X_r)$$

即

$$(L_X\alpha)(x)(X_1(x), \cdots, X_r(x))=(X\alpha(X_1, \cdots, X_r)-$$

$\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_r))(x)$，证毕。

第五章　外微分式

本章介绍微分流形上外微分式的概念,以及外微分式的微分和积分的基本理论。

§1　外微分式

设 M 是 m 维光滑微分流形,每点 $p\in M$ 处的切空间 T_pM 上的 r 次外形式空间为 $\wedge^r T_p^*M$,记

$$\wedge^r(M^*)=\bigcup_{p\in M}\wedge^r T_p^*M$$

称 M 上光滑的 r 次外形式场为 r 次外微分式。

定义 1　设 M 是光滑流形,如果映射

$$\tau: M\longrightarrow \wedge^r(M^*)$$

使对 $\forall\, p\in M$ 及含 p 的局部坐标系(U,x^i),τ 的局部表示

$$\tau|_U=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\tau_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

的分量 $\tau_{i_1\cdots i_r}$ 在 p 光滑,则称 τ 为 M 上的一个 r 次外微分式。r 次外微分式的全体记为 $A^r(M)$,特别地,记 $A^0(M)=C^\infty(M)$。

命题 1　设 $\tau\in A^r(M)$,则函数

$$\tau(X_1,\cdots,X_r)(p)=\tau(p)(X_1(p),\cdots,X_r(p))$$

对 $\forall\, X_i\in\mathscr{X}(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 线性,反对称的,且 $\tau(X_1,\cdots,X_r)\in C^\infty(M)$。

证明　τ 是 r 重 $C^\infty(M)$ 线性且为反对称的直接从定义可看出。至于 $\tau(X_1,\cdots,X_r)$ 的光滑性,可设在坐标系(U,x^i)上

$$X_\lambda|_U = \xi_\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

于是

$$\tau(X_1,\cdots,X_r)|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \tau\left(\frac{\partial}{\partial x^{i1}}\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{ir}}\right) \begin{vmatrix} \xi_1^{i1}\cdots\xi_r^{i1} \\ \cdots \\ \xi_r^{ir}\cdots\xi_r^{ir} \end{vmatrix},$$

由于 $\tau(\frac{\partial}{\partial x^{i1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{ir}}) = \tau_{i_1,\cdots,i_r} \in C^\infty(U)$, $\xi_\lambda^i \in C^\infty(M)$,所以 $\tau(X_1,\cdots,X_r) \in C^\infty(U)$,由于 U 是任取的坐标域,所以有 $\tau(X_1,\cdots,X_r) \in C^\infty(M)$。

反之,从第四章§4定理1,就有

定理 1 若映射 $\tau: \underbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}_{r} \to C^\infty(M)$ 是 r 重 $C^\infty(M)$ 线性,反对称的,则 τ 在 M 上定义了一个 r 次外微分式 $\tilde{\tau}$,使

$$\tilde{\tau}(p)(X_1(p),\cdots,X_r(p)) = (\tau(X_1,\cdots,X_r))(p)$$

其中 $X_\lambda(p) \in T_pM$, $1\leqslant\lambda\leqslant r$, $X_\lambda \in \mathscr{X}(M)$ 是 $X_\lambda(p)$ 在 M 上任意光滑延拓。

例 1 设 $\alpha \in A^1(M)$,定义 $\tilde{\alpha}: \mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ 如下:

$$\tilde{\alpha}(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]), \forall X,Y \in \mathscr{X}(M)$$

证明 $\tilde{\alpha} \in A^2(M)$ 并求 $\tilde{\alpha}$ 的局部表示。

证明 从 $\tilde{\alpha}$ 的表达式看出 $\tilde{\alpha}$ 是反对称的对 $\forall f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(fX,Y) &= fX(\alpha(Y)) - Y(\alpha(fX)) - \alpha([fX,Y]) \\ &= fX(\alpha(Y)) - (Yf)\alpha(X) - fY(\alpha(X)) \\ &\quad - \alpha(f[X,Y] - (Yf)X) \\ &= f(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])) \\ &= f\tilde{\alpha}(X,Y)。 \end{aligned}$$

同理 $\tilde{\alpha}(X,fY)=f\tilde{\alpha}(X,Y)$，由定理 1，$\tilde{\alpha}\in A^2(M)$。

在局部坐标系(U,x^i)下，设 $\alpha(\frac{\partial}{\partial x^i})=\alpha_i$，则

$$\tilde{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})=\frac{\partial x_j}{\partial x^i}-\frac{\partial x_i}{\partial x^j},$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}&=\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\tilde{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})dx^i\wedge dx^j\\&=\sum_{i<j}\tilde{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})dx^i\wedge dx^j\\&=\sum_{i<j}(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j})dx^i\wedge dx^j。\end{aligned}$$

光滑向量场的加法及光滑函数与光滑向量场的乘法在$A^r(M)$中是封闭的，两个外微分式的外积可借助外形式的外积逐点定义，即 $\xi\in A^r(M)$，$\eta\in A^s(M)$，$(\xi\wedge\eta)(p):=\xi(p)\wedge\eta(p)$，则 $\xi\wedge\eta\in A^{r+s}(M)$，于是有

定理 2 设 M 是 m 维光滑流形，记 $A(M)=\bigoplus_{r=0}^{m}A^r(M)$则$A(M)$中有加、数乘法和外积运算，它们具有分配律，结合律和反交换律，因而 $A(M)$成为一个外代数。

设 M、N 分别为 m 维和 n 维光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，f 的诱导映射$f^*:A^r(N)\to A^r(M)$定义为

$((f^*\alpha)(X_1,\cdots,X_r))(p)=\alpha(f(p))(f_*X_1(p),\cdots,f_*X_r(p))$,

$\forall p\in M,\forall X_\lambda\in\mathscr{X}(M),1\leqslant\lambda\leqslant r$，　即

$$f^*\alpha(X_1,\cdots,X_r)=(\alpha\circ f)(f_*X_1,\cdots,f_*X_r)。$$

定理 3 设 M,N 分别是m 维和n 维光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，则对 $\forall r\geqslant 0$，$f^*:A^r(N)\to A^r(M)$是线性的，且对 $\forall\xi\in A^r(N)$，$\eta\in A^s(N)$，有

$$f^*(\xi \wedge \eta) = f^* \xi \wedge f^* \eta$$

证明 直接应用外代数相应的定理即得。

例 2 设 $f: M \to N$ 为光滑流形间的光滑映射 $\alpha \in A^2(N)$，设 (U, x^i) 为 M 的一个局部坐标系，(V, y^a) 为 N 的一个局部坐标系且 $f(U) \subset V$，于是映射 f 在 U 上局部表示 $y^a = y^a(x^1, \cdots, x^m)$，$1 \leqslant a \leqslant n$ （m 和 n 分别为 M 和 N 的维数）。设

$$\alpha \Big|_V = \sum_{a<b} \alpha_{ab} dy^a \wedge dy^b,$$

求 $f^* \alpha \big|_U$ 的表达式

解 由于

$$f^* dy^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} dx^i,$$

所以有

$$\begin{aligned} f^* \alpha \Big|_U &= \sum_{a<b} \alpha_{ab} f^* dy^a \wedge f^* dy^b \\ &= \sum_{a<b} \alpha_{ab} \sum_{i,j} \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^i} dy^i \wedge dy^j \\ &= \sum_{a<b} \alpha_{ab} \sum_{i<j} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^a}{\partial x^i} & \dfrac{\partial y^a}{\partial x^j} \\ \dfrac{\partial y^b}{\partial x^i} & \dfrac{\partial y^b}{\partial x^j} \end{vmatrix} dx^i \wedge dx^j。 \end{aligned}$$

§2 外微分及 de Rham 上同调群

本节先介绍外微分式的微分。

定理 1 设 M 是 m 维光滑流形，则存在唯一的映射 $d: A(M) \to A(M)$，使 $dA^r(M) \subset A^{r+1}(M)$，满足

(1) 对任意 $\alpha, \beta \in A(M)$ 有

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$$

(2) $\alpha \in A^r(M)$，则

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta;$$

(3) 对 $\forall f \in A^0(M) = C^\infty(M)$，$df$ 是 f 的微分

(4) 对 $\forall \alpha \in A(M)$，$d^2\alpha = d(d\alpha) = 0$。

称 d 为外微分算子。

证明 1° 若上述外微分算子存在，则 d 有局部性，即 $\alpha, \beta \in A(M)$，如果存在开子集 $U \subset M$ 使 $\alpha|_U = \beta|_U$，则 $d\alpha|_U = d\beta|_U$ 由 d 满足(1)，只需证 $\forall \omega \in A(M)$，如果 $\omega|_U = 0$，则 $d\omega|_U = 0$

任取 $p \in U$，由 M 局部紧致，存在开集 W，使 $p \in W \subset \overline{W} \subset U$ 且 $\overline{W}$ 紧致，于是存在函数 $h \in C^\infty(M)$，使

$$h|_W \equiv 1, \quad h|_{W \setminus U} \equiv 0,$$

从而 $h\omega \in A(M)$ 且 $h\omega \equiv 0$，由 d 满足条件(1)，所以

$d0 = d(0+0) = 2d0$，于是 $d0 = 0$，由 d 满足条件(2)，所以

$$0 = h(h\omega) = dh \wedge \omega + hd\omega,$$

从而 $d\omega|_W = 0$，特别，$d\omega|_p = 0$，由 p 任意，$d\omega|_U = 0$。

d 的上述局部性意味着 d 可作为 $A(U)$ 上的外微分算子，这是因为对 $\alpha \in A(V)$，$\forall p \in U$，存在 p 的邻域 $V \subset U$ 及 $\tilde{\alpha} \in A(M)$ 使 $\alpha|_V = \tilde{\alpha}|_V$，令 $(d\alpha)(p) = (d\tilde{\alpha})(p)$，$d$ 的局部性意味着上述定义与 $\tilde{\alpha}$ 的选取无关，且 d 满足(1)—(4)。

设 $\alpha \in A^r(M)$，(U, x^i) 为任意一个局部坐标系，

$$\alpha|_U = \frac{1}{r!} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

其中 $\alpha_{i_1 \cdots i_r} \in C^\infty(U)$，由于 $X^{i_\lambda} \in C^\infty(M)$，所以由(4)得 $d(dx^{i_\lambda}) = 0$，且由条件(1)—(4)得

$$\begin{aligned} d\alpha|_U = d(\alpha|_U) &= \frac{1}{r!} d\alpha_{i_1 \cdots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \alpha_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

由 $d\alpha$ 在任意一个坐标域 U 上的局部表达式是唯一确定的，所以 d 是唯一的。

2° 下面证明外微分算子的存在性，对 $\forall\alpha\in A^r(M)$，设 (U, x^i) 为任意一个坐标系，设

$$\alpha|_U=\frac{1}{r!}\alpha_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

定义 $d\alpha$，使

$$d\alpha|_U=\frac{1}{r!}\frac{\partial\alpha_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}。\tag{2.2}$$

要证明上述 $d\alpha|_U$ 的定义与坐标系的选取无关，设 (V_0, y^i) 为另一局部坐标系，$V\cap U\neq\Phi$，坐标转换函数为

$$y^i=y^i(x^1,\cdots,x^m),$$

设

$$\begin{aligned}\alpha|_{U\cap V}&=\frac{1}{r!}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_r}\\&=\frac{1}{r!}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},\end{aligned}$$

由于 $\alpha_{j_1\cdots j_r}$ 与 $\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}$ 关于下指标均反对称的，所以有

$$\alpha_{j_1\cdots j_r}=\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}},$$

于是有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\alpha_{j_1\cdots j_r}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}\\&=\frac{\partial\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}}{\partial y^l}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}dx^j\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}\\&\quad+\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial^2 y^{i_k}}{\partial x^j\partial x^{j_k}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}dx^j\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r},\end{aligned}$$

注意到$\frac{\partial^2 y^{i_k}}{\partial x^j \partial x^{j_k}} dx^j \wedge dx^{j_k} = 0$,就有

$$\frac{\partial \alpha_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

$$= \frac{\partial \tilde{\alpha}_{i_1 \cdots i_r}}{\partial y^l} dy^l \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}。\qquad (2.3)$$

(2.3)表明 $d\alpha|_U$ 的定义与 U 的选取无关,因此 $d\alpha$ 是整体定义的,又因$\frac{\partial \alpha_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x^j} \in C^\infty(U)$,所以 $d\alpha \in A^{r+1}(M)$验证(2.2)定义的 $d\alpha$ 满足条件(1)—(4)。$d\alpha$ 满足(1)和(3)是显然的,我们验证条件(2)和(4),设 $\beta \in A^s(M)$

$$\beta \Big|_U = \frac{1}{s\,!} \beta_{j_1 \cdots j_s} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s},$$

那么

$$(\alpha \wedge \beta) \Big|_U = \frac{1}{r\,!\,s\,!} \alpha_{i_1 \cdots i_r} \beta_{j_1 \cdots j_s} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s},$$

按 $d(\alpha \wedge \beta)$的定义,即(2.2),就有

$$d(\alpha \wedge \beta) \Big|_U = \frac{1}{r\,!\,s\,!} \frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha_{i_1 \cdots i_r} \beta_{j_1 \cdots j_s}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge$$

$$dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}$$

$$= \frac{1}{r\,!} \frac{\partial \alpha_{j_1 \cdots j_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge \frac{1}{s\,!} \beta_{j_1 \cdots j_s} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}$$

$$+ (-1)^r \frac{1}{r\,!} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge \frac{1}{s\,!} \frac{\partial \beta_{j_1 \cdots j_s}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge$$

$$dx^{j_s}$$

$$= (d\alpha \wedge \beta) \big|_U + (-1)^r (\alpha \wedge d\beta) \big|_U$$

及

$$d^2 \alpha \big|_U = d(d\alpha) \big|_U = \frac{1}{r\,!} \frac{\partial^2 \alpha_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = 0$$

最后一个等式是因为 $\frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j \partial x^k}$， 证毕。

例 1 设 $\omega \in A^r(M), X_1, \cdots, X_{r+1} \in \mathscr{X}(M)$，则

$$d\omega(X^1, \cdots, X_{r+1}) = \sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1} X_\lambda(\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots, X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda, X_\mu], X_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots \hat{X}_\mu, \cdots, X_{r+1})。 \tag{2.4}$$

证明 由定理 1，$d\omega \in A^{r+1}(M)$。设 $\alpha: \mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M) \to C^\infty(M)$

使

$$\alpha(X_1, \cdots, X_{r+1}) = (2.4)\text{式的右端。}$$

显然 α 是反对称的，下证 α 是 r 重 $C^\infty(M)$ 线性的，$\forall f \in C^\infty(M)$

$$\alpha(fX_1, \cdots X_{r+1}) = fX_1(\omega(X_2, \cdots X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{\lambda=2}^{r+1}(-1)^{\lambda+1} X_\lambda(\omega(fX_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots, X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{1<\mu}(-1)^{1+\mu}\omega([fX_1, X_\mu], X_2, \cdots, \hat{X}_\mu, \cdots, X_{r+1})$$
$$+ \sum_{1<\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda, X_\mu], fX_1, \cdots \hat{X}_\lambda, \cdots, \hat{X}_\mu, \cdots, X_{r+1})$$
$$= fX_1(\omega(X_2, \cdots, X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{\lambda=2}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}(X_\lambda f)\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots, X_{r+1})$$
$$+ \sum_{\lambda=2}^{r+1}(-1)^{\lambda+1} fX_\lambda(\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots, X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{1<\mu}(-1)^{1+\mu} f\omega([X_1, X_\mu], X_2, \cdots \hat{X}_\mu, \cdots, X_{r+1})$$
$$- \sum_{1<\mu}(-1)^{1+\mu}(X_\mu f)\omega(X_1, X_2, \cdots, \hat{X}_\mu, X_{r+1})$$
$$+ \sum_{1<\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu} f\omega([X_\lambda, X_\mu], X_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots, \hat{X}_\mu, \cdots X_{r+1})$$
$$= f\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1} X_\lambda(\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots X_{r+1}))$$

$$+f\sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda,X_\mu],X_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,\hat{X}_\mu,\cdots,X_{r+1})$$

$$=f\alpha(X_1,\cdots,X_{r+1})。$$

同理可证 α 对自变量 $X_2,\cdots,X_{r+1}$ 也是 $C^\infty(M)$ 线性的，由 §1 定理 1，α 是 $r+1$ 次外微分式，即 $\alpha\in A^{r+1}(M)$。

任取 M 的局部坐标系 (U,x^i)，设

$$\omega|_U=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

那么

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right)\right)$$

$$+\sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}},\frac{\partial}{\partial x^{j_\mu}}\right],\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_\mu}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}(\omega_{j_1\cdots j_\lambda\cdots j_{r+1}})$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}(\omega_{j_1\cdots j_{\lambda-1}j_{\lambda+1},\cdots j_{r+1}})$$

因此有

$$\alpha|_U=\sum_{j_1<\cdots<j_{r+1}}\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}(\omega_{j_1\cdots j_{\lambda-1}j_{\lambda+1},\cdots j_{r+1}})dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\lambda}\cdots\wedge dx^{j_{r+1}},$$

另一方面，

$$d\omega|_U=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r+1}\sum_{i_1<\cdots<i_{\lambda-1}<i<i_\lambda<\cdots<i_r}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_{\lambda-1}i_\lambda,\cdots i_r}}{\partial x^i}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{\lambda-1}}\wedge dx^i\wedge dx^{i_\lambda}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} (-1)^{\lambda-1} \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x^{i_\lambda}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{\lambda+1}},$$

所以

$$\alpha|_U = d\omega|_U。$$

由于(U, x^i)是任取的，我们证明了 $\alpha = d\omega$，即(2.4)成立。

注：从例 2 的证明看出

$$d\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} \sum_{\lambda=1}^{r+1} (-1)^{(\lambda-1)r} \frac{\partial \omega_{i_{\lambda+1} \cdots i_{r+1} i_1 \cdots i_{\lambda-1}}}{\partial x^{i_\lambda}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r+1}}, \tag{2.5}$$

因此，$d\omega|_U = 0$ 当且仅当

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1} (-1)^{(\lambda-1)r} \frac{\partial \omega_{i_{\lambda+1} \cdots i_{\lambda+1} i_1 \cdots i_{\lambda-1}}}{\partial x^{i_\lambda}} = 0, \quad (i_1 < \cdots < i_{r+1})。$$

例 3 设 $f, g \in C^\infty(M)$，则对于 M 上任意局部坐标系(U, x^i)都有

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x^j, x^k)}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x^k, x^i)}\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x^i, x^j)}\right) = 0。$$

证明 令

$$\omega = df \wedge dg$$

则

$$\omega\Big|_U = \frac{1}{2} \frac{\partial(f,g)}{\partial(x^i, x^j)} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \frac{\partial(f,g)}{\partial(x^i, x^j)} dx^i \wedge dx^j$$

由(2.5)式得

$$d\omega\Big|_U = \sum_{i<j<k} \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x^j, x^k)}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x^k, x^i)}\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x^i, x^j)}\right)\right] dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

另一方面

$$d\omega|_U = d^2 f \wedge dg - df \wedge d^2 g = 0$$

所以要证的恒等式成立。

定理 2 （Poincaré 引理）设 $U=B_0(r)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中以原点 O 为中心，以 r 为半径的球形邻域，$\omega\in A^r(U)$ 且 $d\omega=0$，则存在 $\beta\in A^{r-1}(U)$，使得

$$\omega=d\beta$$

证明 设 ω 的坐标表式为

$$\omega=\frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

则

$$d\omega=\frac{1}{(r+1)!}\left\{\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots\hat{i}_\lambda\cdots i_{r+1}}}{\partial x^{i_\lambda}}\right\}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}$$

由于上式右端的系数关于 $i_1\cdots i_{r+1}$ 是反对称的，所以 $d\omega=0$ 当且仅当

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots\hat{i}_\lambda\cdots i_{r+1}}}{\partial x^{i_\lambda}}=0,$$

即

$$\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_{\alpha-1}ii_{\alpha+1}\cdots i_r}}{\partial x^{i_\alpha}}。$$

令

$$\beta(x):=\frac{1}{r!}\sum_{i_1\cdots i_r}\left\{\int_0^1 t^{r-1}\ \omega_{i_1\cdots i_r}(tx)_{dt}\right\}\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}x^{i_\alpha}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge$$

$$\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

其中 $x\in U$，自然 $\beta\in A^{r-1}(U)$。计算 $d\beta$ 如下：

$$d\beta=\frac{1}{r!}\sum_{i_1\cdots i_r}\left\{\int_0^1 t^r\ \frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}(tx)\,dt\right\}dx^i\wedge\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}x^{i_\alpha}\wedge\cdots\wedge$$

$$\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge dx^{i_r}$$

$$+\frac{1}{r!}\sum_{i_1\cdots i_r}\left\{\int_0^1 t^{r-1}\omega_{i_1\cdots i_r}(tx)\,dt\right\}r\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}。$$

上式右端的第一项 $= \sum_{i_1\cdots i_r, i} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$,

所以有

$$d\beta = \frac{1}{r!} \sum_{i_1\cdots i_r} \left\{ \int_0^1 rt^{r-1} \omega_{i_1\cdots i_r}(tx) + \sum_i t^r \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i) dt \right\} \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{i_1\cdots i_r} \left\{ \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^r \omega_{i_1\cdots i_r}(tx) dt \right\} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

$$= \frac{1}{r!} \omega_{i_1\cdots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \omega$$

证毕。

注:从证明过程看出,若 U 为星形区域(存在 $o \in U$,任意 $x \in U$,线段 $ox \subset U$),定理的结论也成立。

Poincaré 引理说明,对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中星形区域,闭的微分形式一定是恰当的。但对一般的区域,结论未必成立。例如:一次微分形式 $\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ 是 $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ 上的闭的一次微分形式,但由于 $\oint_{S^1} \omega = 2\pi$,所以不存在函数 f,使 $\omega = df$,即 ω 不是 $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ 上的恰当的一次微分形式。

为衡量区域对 Poincaré 引理不真的程度,引入上同调的形式语言,用 d 把 $A^k(M)(k \geq 0)$ 串起来成为一个"复形":

$$0 \longrightarrow A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^{k-1}(M) \xrightarrow{d} A^k(M) \xrightarrow{d} A^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^n(M) \xrightarrow{d} 0。$$

记 $A(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} A^k(M)$。

每个 $A^k(M)$ 为加法群,$d: A^{k-1}(M) \longrightarrow A^k(M)$ 为群同态,且满足 $d \circ d = 0$。令

$$Z^k(M) = \ker d = \{\alpha \in A^k(M) \mid d\alpha = 0\},$$

$$\boldsymbol{B}^k(M)=dA^{k-1}(M)=\{\alpha\in A^k(M)\mid \text{存在 } \beta\in A^{k-1}(M)\text{使 } \alpha=d\beta\},$$

$\boldsymbol{B}^k(M)$是 $\boldsymbol{Z}^k(M)$的子群。商群

$$\boldsymbol{H}^k(M)=\boldsymbol{Z}^k(M)/\boldsymbol{B}^k(M)$$

称为光滑流形 M 的第 k 个 de Rham 上同调群。由此看出，$\boldsymbol{H}^k(M)$越"大"，Poincaré 引理不真的程度越"大"。

命题 M 连通，则 $\boldsymbol{H}^0(M)=R^1$。

证明 因为不存在次数 <0 的微分形式，而 $d0=0$，所以按上述复形的规定，$\boldsymbol{B}^0(M)=0$。由于 M 连通，$f\in Z^0(M)$当且仅当 $f=c$(常数)$\in R^1$，所以 $\boldsymbol{H}^0(M)=\boldsymbol{Z}^0(M)/\boldsymbol{B}^0(M)=R^1$.

例 4 (Poincaré 引理的另一种表述)$M\subset R^n$ 是星形开集，则

$$\boldsymbol{H}^0(M)=R^1,\boldsymbol{H}^k(M)=0\quad(k>0)$$

例 5 S^1 为单位圆周，则 $\boldsymbol{H}^1(S^1)=R^1$。

证明 θ 为 S^1 的极角，函数 $\theta:S^1\longrightarrow R^1$ 不是整体定义的，但是 $d\theta$ 为整体定义的一次微分式。因此，任意 $\omega\in A^1(S^1)$，总有局部定义的函数 $g(\theta)$，使

$$\omega=g(\theta)d\theta,$$

令

$$f(\theta)=\int_0^\theta g(t)dt-\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)dt\right)\theta,$$

由于 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$，所以 f 是整体定义在 S^1 上的函数，且

$$df=g(\theta)d\theta-(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)dt)d\theta。$$

从而

$$\omega=cd\theta+df\qquad(c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)dt),$$

于是

$$\boldsymbol{H}^1(S^1)=\boldsymbol{Z}^1(S^1)/\boldsymbol{B}^1(S^1)\cong\{cd\theta\mid c\in R^1\}\cong R^1。$$

例 6　S^2 为 2 维单位球面，则 $\boldsymbol{H}^1(S^2)=0$。

证明　将 S^2 分成两个闭半球 S_+ 和 S_-，则 $S_+\cap S_-=S^1$。任意满足 $d\omega=0$ 的一次微分形式 ω，在 S_+ 和 S_- 上分别用 Poincaré 引理说明，对于引理，分别存在 S_+ 和 S_- 上的光滑函数 f_+ 和 f_- 满足 $\omega|_{S_+}=df_+$，$\omega|_{S_-}=df_-$。于是在 $S_+\cap S_-=S^1$ 上 $d(f_+-f_-)=0$。S^1 连通导致 $(f_+-f_-)|_{S^1}=c$（常数）。定义

$$f(P)=\begin{cases}f_+(p) & p\in S_+\\ f_-(p) & p\in S_-\end{cases}$$

则 f 为 S^2 上的光滑函数且满足 $\omega=\mathrm{d}f$。这表明 $\boldsymbol{H}^1(S^2)=0$。

例 7　$\boldsymbol{H}^2(S^3)=0$。

证明　将 S^3 分成两个角半球 D_+ 和 D_-，则 $D_+\cap D_-=S^3$，对任意 $\omega\in Z^2(S^3)$，在 D_+ 和 D_- 上分别用 Poincaré引理说明，对于引理，分别存在 D_+ 和 D_- 上的一次微分形式 a_+ 和 a_- 满足 $\omega|_{D_+}=\mathrm{d}\alpha_+$，$\omega|_{D_-}=\mathrm{d}\alpha_-$，于是 $\mathrm{d}(\alpha_+-\alpha_-)|_{S^2}=0$。$\alpha_+-\alpha_-\in Z^1(S^2)$. 由例 6，存在函数 $f\in A^0(S^2)$，使

$$(\alpha_+-\alpha_-)\big|_{S^2}=\mathrm{d}f。$$

将 f 光滑延拓到 S^3 上并且令

$$\alpha=\begin{cases}\alpha_+ & 在\ D_+上,\\ \alpha_- & 在\ D_-上,\end{cases}$$

则在 $D_+\cap D_-=S^2$ 上 $\alpha|_{D_+}=\alpha|_{D_-}$，$\alpha$ 为 S^3 上的整体定义的一次微分形式且满足

$$\omega=\mathrm{d}\alpha,$$

从而 $\boldsymbol{H}^2(S^3)=0$。

利用例 6、例 7 的结果及类似的证明方法，可归纳得出下面的结果，即

例 8　$\boldsymbol{H}^0(S^n)=\boldsymbol{R}^1$，$\boldsymbol{H}^k(S^n)=0$，　$0<k<n$。

定理 3　(de Rham)　设 M 是紧致光滑流形，则 M 的第 k 个

de Rham 上同调群与 M 的第 k 个实系数上同调群同构。特别有 $\dim H^k(M) = M$ 的第 k 个 Betti 数。

该定理的证明超出本书范围。介绍这个定理的目的,是让读者了解 $\dim H^k(M)$尽管由光滑的微分式导出,但实际上与 M 的光滑结构无关,仅依赖于 M 的拓扑结构。

习 题

1. 设 $\omega = xydx + zdy - dydz$, $\eta = xdx - yz^2dy - 2xdz$, 求 $d\omega$、$d\eta$ 及 $d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$。

2. $f: R^2 \to R^3$, 使 $f(u, v) = (u\ v, u^2, 3u + v)$, 求 $f^*\omega$ 和 $f^*(d\omega)$。

3. 设 $U = R^2 - \{0\}$, U 上的微分式 $\omega = (xdy + ydx)/(x^2 + y^2)$ 是闭且恰当的,试证明之。

4. $U = R^n - \{0\}$上的 $n-1$ 次微分式

$$\omega = \sum_{i-1}^{n}(-1)^{i+1} f_i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

其中 $f_i = x^i / \| x \|^m$, $\| x \|^m = (\sum_{i=1}^{m}(x^i)^2)^{\frac{m}{2}}$,试问正整数 m 为何值时,ω 是闭的且是恰当的?

5. 证明:如果 α、β 都是闭的微分式,则 $\alpha \wedge \beta$ 也是闭的微分式;若 α 是闭的,β 是恰当的,则 $\alpha \wedge \beta$ 是恰当的。

6. 设 ω 为 1 次外微分式,则对任意光滑向量场 X, Y,有等式

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

成立(直接证明)。

7. 证明单位球面 S^n 的 de Rham 上同调群满足 $H^k(S^n) = 0$, $0 < k < n$(参看例 7 和例 8)。

8. 设 $\omega = (\omega_j^i)$为一次外微分式为元素的矩阵,$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$,证明

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega。$$

9. 设 $\omega = a_{ij} dx^i \wedge dx^j$ 为定义在光滑流形 M 的局部坐标域 (U, x^i) 上的 2 次外微分式，且在 U 上 $det(a_{ij}) \neq 0$。证明 ω 是闭的充要条件是

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^l} a^{kl} + \frac{\partial a^{jk}}{\partial x^l} a^{il} + \frac{\partial a^{ki}}{\partial x^l} a^{jl} = 0,$$

其中 (a^{ij}) 为 (a_{ij}) 的逆矩阵。

§3　外微分形式的积分及 Stokes 定理

3.1　向量空间的定向

在学习空间解析几何时我们知道，给定 3 维欧氏空间的一点 O 及三个线性无关的向量 $e_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$，唯一确定了一个仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$。如果 e_1, e_2, e_3 按顺序构成右手系（左手系），则称 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为右手（左手）仿射坐标系。而且还知道，$\{O; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 与 $\{O; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 同为右手（左手）仿射坐标系当且仅当

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3)\ A,\ detA > 0。$$

一般地，设 V 是 n 维向量空间，$\{e_i\}$ 和 $\{e'_i\}$ 是 V 的两组基，它们可以互相线性表示，设

$$e'_i = a_i^j e_j$$

则 $\det(a_i^j) \neq 0$。如果 $\det(a_i^j) > 0$，则称 $\{e'_i\}$ 与 $\{e_i\}$ 表示 V 的同一定向，否则称它们表示的定向相反。

3.2　微分流形的定向

设 M 是 m 维光滑流形，每点 $p \in M$，切空间 T_pM，作为 m 维向量空间可以有两个定向。设 (U, x^i) 和 (V, y^i) 为 p 的两个局部坐标系，自然基

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}\Big|_p$$

及

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^m}\right\}\Big|_p$$

都决定 T_pM 的定向，如果

$$J_p=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\Big|_p>0,$$

则上述两个基决定 T_pM 的同一个定向。由此可见，如果 M 上存在坐标覆盖，使其坐标转换函数的 Jacobi 矩阵的行列式均为正，那末，任意两个坐标域之间，由自然基决定的定向是可相互传递的，此时流形 M 就有了确定的定向。

定义 1 设 M 是 m 维光滑流形，如果存在 M 的局部坐标卡集

$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha^i)\}$，使 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖，并且当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 时，坐标转换

$$x_\beta^i=x_\beta^i(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m),\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^m)}{\partial(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m)}>0,$$

则称 M 是可定向的。

定理 1 设 M 是满足第二可数性公理的 m 维光滑流形，则 M 是可定向的当且仅当在 M 上存在一个处处不为零的 m 次外微分式。

证明 设 ω 为 M 上处处非零的 m 次外微分式，总存在 M 的坐标邻域覆盖 $\{U_\alpha;x_\alpha^i)\}$，使得 U_α 连通且

$$\omega|_{U_\alpha}=a_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m,\ a_\alpha:U_\alpha\to R^+$$

(如果在某个 U_α 上 $a_\alpha<0$，则将 x_α^1 换成 $-x_\alpha^1$)。在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上，有

$$a_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m = a_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m = \omega|_{U_\alpha \cap U_\beta}。$$

从而

$$a_\alpha = a_\beta \frac{\partial(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)}{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)}。$$

于是 $a_\alpha, a_\beta > 0$ 导致$\frac{\partial(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)}{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^1)} > 0$,即 M 是可定向的。

反之,由于 M 是可定向的且满足第二可数性公理,所以存在局部有限的坐标邻域覆盖$\{(U_\alpha; x_\alpha^i)\}$,使 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \Phi$ 时,

$$\frac{\partial(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)}{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)} > 0,$$

又根据单位分解定理,存在函数族$\{h_\alpha\}$, $h_\alpha \in C^\infty(M)$, $0 \leqslant h_\alpha \leqslant 1$, $\operatorname{supp} h_\alpha \subset U_\alpha$,且$\sum h_\alpha \equiv 1$,令

$$\omega = \sum_\alpha h_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m,$$

由于$\{U_\alpha\}$是局部有限的,右端在每点的邻域内是有限项的和。又因为和式中每一项 $h_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m$ 是M 上光滑的 m 次微分式,所以 ω 是定义在整个M 上的光滑的m 次微分式。要证明 ω 处处非零,任取一点 $x \in M$,至多有有限个$\{U_\alpha\}$中成员 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_r}$,使 $x \in U_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge U_{\alpha_r}$,

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\alpha_\lambda}(x) dx_{\alpha_\lambda}^1 \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_\lambda}^m \\ &= \left(h_{\alpha_1}(x) + \sum_{\lambda=2}^{r} h_{\alpha_\lambda}(x) \frac{\partial(x_{\alpha_\lambda}^1, \cdots, x_{\alpha_\lambda}^m)}{\partial(x_{\alpha_1}^1, \cdots, x_{\alpha_1}^m)}\bigg|_x \right) dx_{\alpha_1}^1 \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_1}^m,\end{aligned}$$

由于最后一式的系数是正数,所以 $\omega(x) \neq 0$。

例 1 单位球面$S^n = \{x \in R^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$是可定向的,事实上,将 R^{n+1}上的 n 次微分形式

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$$

限制在 S^n 上的所得 n 次微分形式

$$\omega = \eta|_{S^n}$$

就是 S^n 上一个处处非零的 n 次微分式，事实上，令

$$U_i^+ = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in S^n \mid x^i > 0\},$$

$$U_i^- = \{(x^1_1, \cdots, x^{n+1}) \in S^n \mid x^i > 0\}$$

在 $U_i^{\pm}$ 上取$(x^1, \cdots, \hat{x}^i, \cdots, x^{n+1})$为局部坐标，只要证明 ω 在每个 U_i^+ 和 U_i^- 上不为零即可。例如在 U_{n+1}^+上，可算出

$$dx^{n+1} = \frac{-\sum_{a=1}^{n} x^a dx^a}{\sqrt{1 - \sum_{a=1}^{n} (x^a)^2}}。$$

所以

$$\omega\Big|_{U_{n+1}^+} = (-1)^n \frac{dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}{\sqrt{1 - \sum_{a=1}^{n} (x^a)^2}} \neq 0。$$

同理可验证 ω 在其余坐标域上非零。

例 2 实射影空间 P^n 当 n 为奇数时是可定向的，n 为偶数时是不可定向的。事实上，从例 1 中的 ω 的表达式看出，ω 在对径映射 $A: S^n \to S^n$，$A(-x) = x$ 下，有下式成立

$$A^* \omega_x = (-1)^{n+1} \omega_{Ax}。$$

因此，当 n 为奇数时，ω 在 A 的作用下不变。设

$$\pi: S^n \to P^n, \pi(-x) = \pi(x) = [x]$$

是自然投影，于是当 n 为奇数时，有唯一确定的 $\tilde{\omega}$，使

$$\pi^* \tilde{\omega} = \omega,$$

$\tilde{\omega}$ 为 P^n 上处处非零的 n 次微分式，所以 P^n 可定向。当 n 为偶数时，因为 $A^* \omega = -\omega$。若 P^n 可定向，则存在 P^n 上处处非零的 n 次微分形式 $\tilde{\omega}$ 及处处非零的光滑函数 $g: S^n \longrightarrow R$，使

$$\pi^* \tilde{\omega} = g\omega。$$

从而有

$$g(x)\omega_x = g(-x) A^* \omega_{Ax} = -g(-x)\omega_x$$

这就导致 $g(x)=-g(-x)$，$g(x_0)>0$ 当且仅当 $g(-x_0)<0$。由连续函数的零点定理，$g(x)$在 S^n 上有零点，矛盾。

3.3 带边流形

前面所定义的微分流形并没有包括诸如 R^n 中闭球区域

$$D^n=\{x\in R^n \mid \|x\|\leqslant 1\},$$

圆柱面

$$S^1\times[0,1]=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2=1,0\leqslant z\leqslant 1\}。$$

因为点 $x\in\partial D^n$ 时，找不到 x 在 D^n 中的开集与欧氏空间 IR^n 的开集同胚，所以 D^n 不是前面所定义的微分流形。同理 $S^1\times[0,1]$也不是微分流形。但只要将微分流形的定义稍加修改，就可弥补这种缺憾。

R^n 的一个半空间记为

$$H^n=\{x\in R^n \mid x^n\geqslant 0\},$$

取相对拓扑，则 H^n 为 Hausdorff 空间，其边界和内部分别为

$$\partial H^n=\{x\in R^n \mid x^n=0\},$$

$$IntH^n=\{x\in H^n \mid x^n>0\}=H^n-\partial H^n。$$

设 U 是 H^n 的一个开子集，$f:U\longrightarrow R$ 称为是 C^k 的，如果存在 R^n 中开集 $\tilde{U}$ 及 $\tilde{U}$ 上的 C^k 函数 $\tilde{f}:\tilde{U}\longrightarrow R$，使 $U=\tilde{U}\cap H^n$ 且 $f=\tilde{f}|_U$。类似上述 C^k 函数的描述，可定义 H^n 中两个开子集 U、V 之间的光滑同胚。设 $f:U\longrightarrow V$ 是 1－1 映射，如果存在 R^n 中开集 $\tilde{U}$、$\tilde{V}$ 以及光滑同胚 $\tilde{f}:\tilde{U}\longrightarrow\tilde{V}$，使得 $U=\tilde{U}\cap H^n$，$V=\tilde{V}\cap H^n$，并且 $\tilde{f}|_U=f$。

因为 H^n 的开集 U 同时又是 R^n 的开集当且仅当 $U\cap\partial H^n=\emptyset$，又因为 $f(U)=\tilde{f}(U)$为 R^n 中的开集，所以 $f(U)\cap\partial H^n=\emptyset$。这说明光滑同胚 $f:U\rightarrow V$ 总是把 H^n 的内点映为 H^n 的内点，把边界点映为边界点。

定义 2 所谓 C^∞ 带边流形 M 是一个 Hausdorff 空间，并且在

M 上指定了一个微分结构 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，其中 U_α 是 M 的开子集，φ_α 是从 U_α 到 H^m 的开子集的同胚，并且满足下列条件：

(1) $\{U_\alpha\}$ 是 M 的覆盖。

(2)若 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{A}$，则当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\Phi$ 时，

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta),$$
$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是光滑同胚。

$\partial M=\{p\in M\mid$ 存在坐标卡 $(U,\varphi)\in\mathscr{A}$，使得 $p\in U$，且 $\varphi(p)\in\partial H^m\}$ 称为 M 的边界。由上面的讨论知，边界点的性质与坐标卡的选取无关。

定理 2 设 M 是 m 维 C^∞ 带边流形且 $\partial M\neq\emptyset$，则由 M 的微分结构 $\mathscr{A}$ 诱导出 ∂M 上的微分结构 $\tilde{\mathscr{A}}$，使 ∂M 成为 $m-1$ 维 C^∞ 无边流形。此时包含映射 $i:\partial M\to M$ 是嵌入。如果 M 是可定向的，则 ∂M 是可定向的。

证明 设 $(U,\varphi)\in\mathscr{A}$，由边界的定义知

$$\varphi(U\cap\partial M)=\varphi(U)\cap\partial H^m,$$

它是 ∂H^m 中的开集。令

$$\tilde{\mathscr{A}}=\{(\tilde{U}_\alpha,\tilde{\varphi}_\alpha)\mid\tilde{U}_\alpha=U_\alpha\cap\partial M,\tilde{\varphi}_\alpha=\varphi_\alpha|_{\tilde{U}_\alpha},(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{A}\},$$

由于 $\partial H^m=R^{m-1}$，所以 ∂M 是通常意义下的 $m-1$ 维光滑流形。

对于 $p\in\partial M$，能找到坐标卡 $(U,\varphi)\in\mathscr{A}$，使

$$U\cap\partial M=\{q\in U\mid(\varphi(q))^m=0\},$$

$(i,\partial M)$ 是 M 的嵌入子流形。

由 M 可定向，设 $\mathscr{A}$ 中任意两个坐标卡定向相符，应证在 ∂M 上诱导的坐标卡集 $\tilde{\mathscr{A}}$ 中任意两个成员也定向相符。实际上，设 (U,φ)、$(V,\psi)\in\mathscr{A}$ 且 $U\cap V\cap\partial M\neq\emptyset$，令 $x^i(p)=(\varphi(p))^i,\forall p\in U$；$y^i(p)=(\psi(p))^i,\forall p\in V$。则当 $p\in U\cap V\cap\partial M$ 时，有

$$x^m(p)=y^m(p)=0。$$

假定坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$的表达式是

$$y^i=y^i(x^1,\cdots,x^m),$$

则

$$y^m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)=0。$$

在 $q\in U\cap V\cap\partial M$ 处,坐标转换的 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|_{\varphi(q)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial y^{m-1}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^{m-1}}{\partial x^m}\\ 0 & \cdots & \left.\dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\right|_{x^m=0}\end{vmatrix}$$

$$=\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{m-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{m-1})}\right|_{\tilde{\varphi}(q)}\left.\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\right|_{x^m=0}$$

由于 $x^m>0$ 时,有 $y^m>0$,从 y^m 在 $x^m=0$ 处的 Taylor 展开式

$$y^m=x^m\left.\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\right|_{x^m=0}+0(x^m)$$

看出 $\left.\dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\right|_{x^m=0}\geqslant 0$。于是$\left.\dfrac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|_{\varphi(q)}>0$ 导致

$$\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{m-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{m-1})}\right|_{\tilde{\varphi}(q)}>0。$$

这表明 $\mathscr{A}$中任意二成员定向相符。

定义 3 设 M 是 m 维定向的带边光滑流形,$\partial M\neq\emptyset$,$\mathscr{A}$是 M 的定向。对于$(U;x^i)\in\mathscr{A}$,当

$$\widetilde{U}:=U\cap\partial M=\{(x^1,\cdots,x^m)\in U\mid x^m=0\}\neq\emptyset$$

时,在 $\widetilde{U}$ 上取局部坐标

$$((-1)^m x^1, x^2, \cdots, x^{m-1})$$

这样的局部坐标系在∂M上确定的定向称为M的定向在∂M上诱导的定向。

例 3 $D \subset R^2$为有界区域，(x^1)给出了∂D的定向（图 1）。$D \subset R^3$为有界区域，$(-x^1, x^2)$给出了∂D的定向（图 2）。

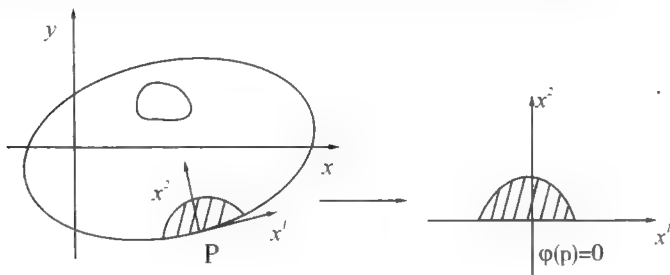


图1

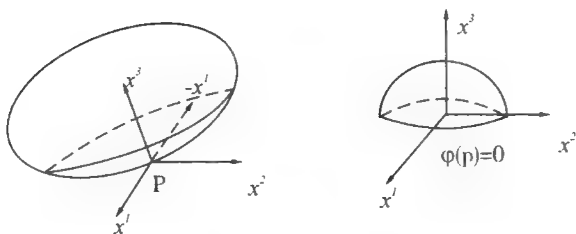


图2

3.4 外微式的积分和 Stokes 定理

设M是满足第二可数性公理的m维有向光滑流形，$\omega \in A^r(M)$，定义

$$\text{supp}\ \omega=\overline{\{p\in M\mid\omega(p)\neq 0\}},$$

supp ω 称为 ω 的支撑集，记 $A_0^r(M)=\{\omega\in A^r(M)\mid \text{supp}\ \omega$ 紧致$\}$，以下定义 $A_0^r(M)$ 中的元素 ω 在 M 上的积分 $\int\limits_M\omega$。

(1) $\omega\in A_0^m(M)$，存在 M 的一个定向相符的坐标卡 (U,φ)，使 $U\supset\text{supp}\ \omega$。在这种情形，由于

$$\omega|_{M\setminus U}=0,$$

$$\omega|_U=a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

其中 $a\in C^\infty(U)$，$\text{supp}\ a=\text{supp}\ \omega\subset U$，$\{x^i\}$ 是 U 上由 φ 决定的坐标系，定义 ω 在 M 上的积分为

$$\int\limits_M\omega=\int\limits_{\varphi(U)}a\circ\varphi^{-1}dx^1\cdots dx^m \tag{3.1}$$

右端是普通的 Riemann 积分，由于 supp a 紧致，它是一个定值。

命题 1 (3.1)中定义的积分与定向相符的坐标卡 (U,φ) 的选取无关。

证明 设 (V,ψ) 为 M 的一个定向相符的坐标卡，$\{y^i\}$ 为局部坐标，使 $\text{supp}\ \omega\subset V$，设

$$\omega|_{M\setminus V}=0,\ \omega|_V=b\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m,$$

$$\text{supp}\ b\subset V$$

由于 $\text{supp}\ \omega\subset U$，$\text{supp}\ \omega\subset V$，$\text{supp}\ \omega\subset U\cap V$。$\text{supp}\ a=\text{supp}\ b=\text{supp}\ \omega\subset U\cap V$。

在 $U\cap V$ 上

$$a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=b\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m=b\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m。$$

从而

$$a\circ\varphi^{-1}=b\circ\psi^{-1}\circ(\psi\circ\varphi^{-1})\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}$$

其中 $\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}>0$。于是有

$$\int_{\psi(V)} b\circ\psi^{-1}dy^1\cdots dy^m = \int_{\psi(U\cap V)} b\circ\psi^{-1}dy^1\cdots dy^m$$

$$\overset{\text{重积分换元公式}}{=\!=\!=\!=} \int_{\varphi(U\cap V)} (b\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\psi^{-1})\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}dx^1\cdots dx^m。$$

$$= \int_{\varphi(U\cap V)} a\circ\varphi^{-1}dx^1\cdots dx^m = \int_{\varphi(U)} a\circ\varphi^{-1}dx^1\cdots dx^m$$

证毕。

(2)对任意 $\omega\in A_0^m(M)$。

设$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$为 M 的定向相符的坐标覆盖,由于 M 是局部紧致的满足第二可数性公理的 Hausdorff 空间,可设$\{U_\alpha\}$是局部有限的开覆盖。由单位分解定理,存在从属于$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{h_\alpha\}$,即 $supp\ h_\alpha$ 紧致,$supp\ h_\alpha\subset U_\alpha$,$1\geqslant h_\alpha\geqslant 0$,$\sum\limits_\alpha h_\alpha\equiv 1$。设

$$\omega\big|_{U_\alpha} = a_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m,\ a_\alpha\in C^\infty(U_\alpha)。$$

由于

$$\omega=(\sum_\alpha h_\alpha)\omega=\sum_\alpha h_\alpha\omega$$

$$(h_\alpha\omega)\big|_{U_\alpha} = h_\alpha a_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m,$$

注意到 supp $(h_\alpha\omega)\subset$ supp $h_\alpha\cap$ supp $\omega\subset$ supp h_α(紧致)$\subset U_\alpha$,由(3.1)

$$\int_M h_\alpha\omega := \int_{\varphi_\alpha(u_\alpha)} (h_\alpha a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m$$

是有意义的。规定

$$\int_M\omega = \sum_\alpha\int_M h_\alpha(\omega) = \sum_\alpha\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (h_\alpha a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m \tag{3.2}$$

由于 supp ω 紧致,只有有限个 U_α,使 $U_\alpha\cap$ supp $\omega\neq\emptyset$,而 supp $h_\alpha\omega\subset$ supp ω,所以只有有限个 α,使 supp $h_\alpha\omega\subset U_\alpha$,故上式右端是有

限和。

命题 2 (3.2)定义的积分与 M 的定向相符的局部有限的坐标覆盖 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 的选取无关，与从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解的选取无关。

证明 设 $\{(V_\lambda,\psi_\lambda)\}$ 是 M 的另一个定向相符的局部有限的坐标覆盖，$\{g_\lambda\}$ 是从属于 $\{V_\lambda\}$ 的单位分解，ψ_λ 在 V_λ 上决定的局部坐标系设为 $\{y_\lambda^i\}$，则

$$\omega|_{V_\lambda}=b_\lambda dy_\lambda^1\wedge\cdots\wedge dy_\lambda^m,\quad b_\lambda\in C^\infty(V_\lambda)。$$

当 $U_\alpha\cap U_\lambda\neq\emptyset$ 时，由于 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 与 (U_λ,ψ_λ) 定向相符，故

$$\frac{\partial(y_\lambda^1,\cdots,y_\lambda^m)}{\partial(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m)}>0,$$

与

$$\omega|_{U_\alpha}=a_\alpha dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m$$

比较知，在 $\varphi\alpha(U_\alpha\cap U_\lambda)$ 上，有

$$a_\alpha\varphi_\alpha^{-1}=(b_\lambda\circ\psi_\lambda^{-1})\circ(\psi_\lambda\circ\varphi_\alpha^{-1})\frac{\partial(y_\lambda^1,\cdots,y_\lambda^m)}{\partial(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^m)},$$

$$\begin{aligned}
&\sum_\lambda\int_{\psi_\lambda(V_\lambda)}(g_\lambda b_\lambda)\circ\psi_\lambda^{-1}dy_\lambda^1\cdots dy_\lambda^m\\
&=\sum_\lambda\int_{\psi_\lambda(V_\lambda)}\sum_\alpha(h_\alpha\circ\psi_\lambda^{-1})(g_\lambda b_\lambda)\circ\psi_\lambda^{-1}dy_\lambda^1\cdots dy_\lambda^m\\
&=\sum_{\alpha,\lambda}\int_{\psi_\lambda(V_\lambda)}(h_\alpha g_\lambda b_\lambda)\circ\psi_\lambda^{-1}dy_\lambda^1\cdots dy_\lambda^m\\
&=\sum_{\alpha,\lambda}\int_{\psi_\lambda(U_\alpha\cap V_\lambda)}(h_\alpha g_\lambda b_\lambda)\circ\psi_\lambda^{-1}dy_\lambda^1\cdots dy_\lambda^m\quad(\mathrm{supp}\ h_\alpha g_\lambda b_\lambda\subset U_\alpha\cap V_\lambda)\\
&=\sum_{\alpha,\lambda}\int_{\psi_\alpha(U_\alpha\cap V_\lambda)}(h_\alpha g_\lambda a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m\\
&=\sum_{\alpha,\lambda}\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}(h_\alpha g_\lambda a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\sum_{\lambda} g_\lambda) \circ \varphi_\alpha^{-1} (h_\alpha a_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m$$

$$= \sum_{\alpha} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (h_\alpha a_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m。$$

定义 4 设 M 是满足第二可数性公理的 m 维有向光滑流形，则对任一有紧致支撑集的 m 次外微分式 ω，(3.2)定义的数值 $\int_M \omega$ 称 ω 在 M 上的积分。

性质 ω、$\eta \in A_0^m(M)$，$\lambda \in \boldsymbol{R}$，则

$$\int_M \omega + \eta = \int_M \omega + \int_M \eta, \int_M \lambda\omega = \lambda \int_M \omega,(\text{线性性质})。$$

(3)如果 $\omega \in A_0^r(M)(r < m)$，可定义 ω 在 M 的 r 维子流形(f, N)上的积分。设 N 是满足第二可数性公理的 r 维光滑流形，$f: N \to M$ 为嵌入，则定义

$$\int_{f(N)} \omega = \int_N f^* \omega。$$

定理 3 （Stokes 定理） 设 M 是满足第二可数性公理的有向光滑带边流形，$\omega \in A_0^{m-1}(M)$，则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega,$$

其中∂M 取从 M 诱导的定向，$i: \partial M \longrightarrow M$ 是包含映射。

证明 设$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$为 M 的定向相符的局部有限的坐标覆盖，$\{h_\alpha\}$为从属于覆盖$\{U_\alpha\}$的单位分解，则

$$\omega = \sum_{\alpha} h_\alpha \omega。$$

Supp ω 紧致，supp ω 只与有限个 U_α 相交，上式是有限和，所以

$$d\omega = \sum_{\alpha} d(h_\alpha \omega),$$

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\partial M} h_\alpha \omega,$$

$$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_M d(h_\alpha \omega)。$$

只要证明,对每个 α,有

$$\int_{\partial M} h_\alpha \omega = \int_M d(h_\alpha \omega)。$$

由 supp $h_\alpha \omega$(紧)$\subset U_\alpha$,问题归结为只要对存在定向相符的坐标卡 (U,φ),使 supp $\omega \subset U$,证明

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

成立。

命 $x^i(p) = (\varphi(p))^i, \forall p \in U$。设 ω 的局部表达式是

$$\omega|_U = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} a_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (3.3)$$

其中 $a_j \in C^\infty(U)$,supp $a_j \subset U$,外微分上式得

$$d\omega|_U = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a^j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (3.4)$$

分两种情形讨论。

1° $U \cap \partial M = \emptyset$。

supp $\omega \subset U \subset Int\ M$,所以 $i^* \omega = 0$, $\int_{\partial M} i^* \omega = 0$。由于 supp $\omega \subset$ 紧子集 $\subset U$,可设 $\varphi(U) \subset H^m$ 是有界开区域,因此有充分大的 K, $C = \{(x^1, \cdots, x^m) \in R^m \mid |x^i| \leqslant K, \forall i\}$,使

$$\varphi(U) \subset C \cap H^m。$$

$\varphi(U) \setminus$ supp $a_j \circ \varphi^{-1}$是开集,将 $a_j \circ \varphi^{-1}$光滑延拓到 $C \cap H^m$ 上,使 $a_j \circ \varphi^{-1}$在 $C \cap H^m$ 边界上为 0。对 $1 \leqslant j \leqslant m-1$

$$\int_M d\omega = \int_{\varphi(U)} \sum_{j=1}^m \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m$$

$$= \int_{H^m \cap C} \sum_{j=1}^m \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{H^m \cap C} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\substack{|x^i| \leq K \\ i \neq m, K \geq x^m \geq 0}} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\substack{|x^i| \leq K \\ i \neq m, x^m \geq 0}} \left(\int_{-K}^{K} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \hat{dx^j} \cdots dx^m +$$

$$\int_{\substack{|x^i| \leq K \\ i \neq m}} \left(\int_{0}^{K} \frac{\partial(a_m \circ \varphi^{-1})}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1}。$$

$$\int_{-K}^{K} \frac{\partial a_j \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j} dx^j = a_j \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{j-1}, K, x^{j+1}, \cdots, x^m)$$

$$- a_j \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{j-1}, -K, x^{j+1}, \cdots, x^m)$$

$$= 0$$

$$\int_{0}^{K} \frac{\partial a_m \circ \varphi^{-1}}{\partial x^m} dx^m = a_m \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{m-1}, K) - a_m \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0) = 0$$

从而

$$\int_M d\omega = 0。$$

2° $U \cap \partial M \neq \emptyset$。

supp $a_j \circ \varphi^{-1} \subset \varphi(U)$。将 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 光滑延拓，使 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U)$ 处的值为零。

$$\int_M d\omega = \int_{\varphi(U)} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right) dx^1 \cdots dx^m$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{H^m \cap C} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ i \neq j \\ K \geqslant x^m \geqslant 0}} \left(\int_{-K}^{K} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \overset{\wedge}{dx^j} \cdots dx^m$$

$$+ \int\limits_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ i \neq m}} \left(\int_{0}^{K} \frac{\partial(a_m \circ \varphi^{-1})}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^m。$$

$$= - \int\limits_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ i \neq m}} a_m \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1}。$$

$$\int\limits_{\partial M} i^* \omega = \int\limits_{U \cap \partial M} i^* \omega = \int\limits_{U \cap \partial M} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} a_j dx^1 \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^m$$

$$\xlongequal{x^m = 0} \int\limits_{U \cap \partial M} (-1)^{m+1} a_m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

$$= - \int\limits_{\varphi(U) \cap \partial H^m} a_m \circ \varphi^{-1} dx^1 \cdots dx^{m-1}$$

故

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} i^* \omega。$$

很明显，Stokes 定理包括了欧氏空间微积分学中的 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式。

例 4 设 $D \subset R^2$ 是一个有界闭区域，其定向与 R^2 一致。在 D 的边界 ∂D 上的诱导定向是沿着 ∂D 的正向行进的。区域 D 的内部落在行进者的左边，即 ∂D 的正向与指向 D 内部的法向量构成与 R^2 的定向一致的标架。设 P、Q 是 D 上的光滑函数（即 P、Q 可以延拓为包含 D 在内的一个开区域内的光滑函数）。

令

$$\omega = P dx + Q dy$$

则

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

由上述 Stokes 定理得到

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

这就是微积分学中的熟知的 Green 公式。

例 5 设 D 是 R^3 中有界闭区域，定向与 R^3 一致。∂D 上取 D 的诱导定向（按前面的规定，∂D 的定向为 $\left\{-\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right\}$，由于 $\left\{-\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$ 与 R^3 定向一致，故外法向量 $-\frac{\partial}{\partial x^3}$ 为正法向）。设 P、Q、R 为 D 上光滑函数，令

$$\varphi = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

则

$$d\varphi = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz。$$

由 Stokes 定理

$$\int_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int_{\partial D} \varphi = \int_D d\varphi = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

这是经典微积分学中的 Gauss 公式。

例 6 设 S 是 R^3 中有向曲面，∂S 是简单闭曲线且有从 S 诱导的定向。P、Q、R 是在包含 S 在内的一个区域上光滑函数，由 Stokes 定理

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int_S d(Pdx + Qdy + Rdz)$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

这是经典的 Stokes 公式。

例 7 设 M 是 n 维定向光滑流形，若 M 还是紧致无边界的，则 M 的第 n 个 de Rham 上同调群 $H^n(M)\neq 0$。

证明 (1) 由于 M 是可定向的，所以存在处处非零的 n 次外微分式 $\omega\in A^n(M)$，并且 $\int_M\omega\neq 0$。事实上，选取 M 的定向相等的坐标域覆盖 $\{(U_\alpha;x_\alpha^i)\}$ 且 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的。设 $\{h_\alpha\}$ 是从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解，按(3.2)

$$\int_M\omega=\sum_\alpha\int_M h_\alpha\omega=\sum_\alpha\int_{U_\alpha}h_\alpha\omega。$$

由 ω 处处不为零，则

$$\omega|_{U_\alpha}=f_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m,$$

且对每个 α，f_α 的正或负与 α 无关，可假设对每个 α，$f_\alpha>0$(证明留给读者)。取一点 $p\in M$，由 $\sum\limits_\alpha h_\alpha(p)=1$ 且 $h_\alpha(p)\geqslant 0$，存在在某个 h_{α_0} 及 p 的邻域 $U\subset U_{\alpha_0}$，使 $h_{\alpha_0}\big|_U>0$，所以有

$$\int_M\omega=\sum_\alpha\int_{U_\alpha}f_\alpha h_\alpha dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m\geqslant\int_{U_{\alpha_0}}f_{\alpha_0}h_{\alpha_0}dx_{\alpha_0}^1\cdots dx_{\alpha_0}^m>0。$$

(2) $H^n(M)\neq 0$，否则存在$(n-1)$次外微分式 η，使 $d\eta=\omega$，由 *Stokes* 定理，有

$$\int_M\omega=\int_M d\eta=\int_{\partial M}\eta=0,$$

与(1)的结论矛盾。

例 8 $m\neq n$，S^m 与 S^n 必不同胚，R^n 与 S^n 不同胚。

证明 设 $m<n$。由例 7，$\dim H^m(S^m)\neq 0$，由 §2 例 8，$\dim H^m(S^n)=0$。由 de Rham 定理，S^m 和 S^n 的第 m 个 *Betti* 数不相等，于是 S^m 与 S^n 必不同胚。

由 Poincaré 引理，$H^n(R^n)=0$，而 $H^n(S^n)\neq 0$，$\dim H^n(R^n)\neq$

$dim\ H^n(S^n)$，所以 R^n 与 S^n 不同胚。

作为 Stokes 定理的应用，我们将证明有关辛流形的两个断言。先介绍辛流形的两个概念。

设 V 为向量空间，V 上的一个二次外形式 $\omega \in \wedge^2(V^*)$ 称为非退化的，如果对 $X \in V$，等式 $\omega(X, Y) = 0$ 对任意的 $Y \in V$ 成立蕴含 $X = 0$。显然，ω 是非退化当且仅当 ω 在 V 的基底下的矩阵的行列式 $det\ \omega \neq 0$，即

$det(\omega(e_i, e_j)) \neq 0$，其中 $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n = dimV\}$ 是 V 的基底。

定义 5 向量空间 V 上的一个非退化的二次外形式 ω 称为 V 上的一个辛形式，称 (V, ω) 为辛向量空间。

由线性代数的知识可以证明下面的两个断言：

1. 如果 V 上存在辛形式，则 $dim\ V$ 为偶数。

2. ω 为 V 上的一个辛形式，则存在 V 的基底 $\{e_i\}$，$1 \leqslant i \leqslant dimV = 2m$，

使得

$$\omega = \sum_{\lambda=1}^{m} \alpha^\lambda \wedge \alpha^{m+\lambda},$$

其中 $\{\alpha^i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2m\}$ 为 $\{e_i\}$ 的对偶基。

由断言 2 看出

$$\omega^m = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{m个} \neq 0 \tag{3.5}$$

定义 6 光滑流形 M 上的一个 2 次外微分式 $\omega \in A^2(M)$ 称为非退化的，如果对每点 $x \in M$，$\omega_x \in \wedge^2(T_* M)$ 是非退化的。

定义 7 光滑流形 M 上的一个非退化的闭的 2 次外微分式 ω 称 M 上的一个辛结构，(M, ω) 称辛流形。

例如 R^{2m} 上有整体坐标系 $\{x^i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2m\}$，

$$\omega = \sum_{\lambda=1}^{m} dx^\lambda \wedge dx^{m+\lambda}$$

就是 R^{2m} 上一个辛结构，因而 (R^{2m}, ω) 是辛流形。

由定义 7 及(3.5)看出，辛流形必然是偶维可定向的微分流形。应用 Stokes 定理，有

例 9 若 M 是 $2m$ 维紧致无边界的辛流形，则 $H^{2k}(M)\neq 0$，$0\leqslant k\leqslant m$。

证明 设 ω 是 M 的辛结构，则 $d\omega=0,\omega^m\neq 0$(处处)。由例 9 的证明知

$$\int_M \omega^m \neq 0 \tag{3.6}$$

且对于 $0<k\leqslant m$

$$d\omega^x = d\underbrace{(\omega\wedge\cdots\wedge\omega)}_{k\text{个}}=0。$$

如果 $H^{2k}(M)=0$，那么存在 $\eta\in A^{2k-1}(M)$，使得 $\omega^k=d\eta$，从而

$$\omega^m=\omega^k\wedge\omega^{m-k}=d\eta\wedge\omega^{m-k}=d(\eta\wedge\omega^{m-k})。$$

而 M 是紧致无边界的，由 Stokes 定理就有

$$\int_M \omega^m=\int_M d(\eta\wedge\omega^{m-k})=0,$$

与(3.6)矛盾。从而对 $0<k\leqslant m$，$H^{2k}(M)\neq 0$，对 $k=0$，由 §2 命题，$H^0(M)=R$，证毕。

例 10 维数 $2m>2$ 的球面 S^{2m} 上不存在辛结构。

证明 如果 $S^{2m}(m>1)$上存在辛结构，那么由例 9，对 $0<k\leqslant m$，有 $H^{2k}(M)\neq 0$，与 §2 例 8 的结论矛盾。

习 题

1. 证明 1 维实射影空间 P^1 是可定的。给出 P^1 上一个处处非零的一次外形式。

2. 在 $R^3-\{0\}$ 中定义

$$\omega=\frac{x}{r^3}dy\wedge dz+\frac{y}{r^3}dz\wedge dx+\frac{z}{r^3}dx\wedge dy,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。$S^2(r_0)$表示 R^3 中的原点为中心，以 r_0 为半径的球面。证明

$$\int_{S^2(r_0)} \omega = 4\pi。$$

3. $f: D \to R^3$，使 $f(u,v)=(u,v,1+u^2+v^2)$，$D=[0,1]\times[0,1]$，又设 $\omega = ydy\wedge dz + xzdx\wedge dz$ 是 R^3 上的 2 次微分式，求 $\int_D f^*\omega$。

4. 设 M 是 R^n 中 $p+q+1$ 维定向无边界嵌入子流形，ω、η 分别是定义在 R^n 中含 M 在内的开子集上的 p 次和 q 次外微分式。证明存在实数 a，使 $\int_M \omega\wedge d\eta = a\int_M d\omega\wedge\eta$。

5. 设 g 是 n 维定向流形 M 上处处正定的(0,2)型张量场，$(U;x^i)$是定向相符的局部坐标系。令 $g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$，$G=det(g_{ij})$，证明 $\Omega=\sqrt{G}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 与定向相符的局部坐标系$(U;x^i)$的选取无关，而是大范围定义的 n 次外微分式。

6. 给出 2 维球面 S^2 上的一个辛结构。

7. 证明辛向量空间(V,ω)必是偶维数的且存在 V^* 的基$\{\alpha^\lambda,\alpha^{\lambda+m}|1\leqslant\lambda\leqslant m=\frac{1}{2}dimV\}$，使 $\omega=\sum_{\lambda=1}^{m}\alpha^\lambda\wedge\alpha^{m+\lambda}$。

第六章　基本群和同调群简介

§1　道路的同伦类

图形 X 中一条以 x_0 为起点、x_1 为终点的道路 h，是指一个连续映射 $h:[0,1]\to X$，满足 $x_0=h(0)$，$x_1=h(1)$。让一条道路 h_1 在 X 中保持端点 x_0 和 x_1 不动连续形变为 h_2，就称道路 h_1（定端）同伦于道路 h_2，记为 $h_1\simeq h_2$（图 1）。并不是每一图形上有相同端点 x_0 及 x_1 的任意两条道路都同伦，图 1 中，h_1 或 h_2 均不与 h_3 同伦，因为两者之间存在一个不可跨越的“洞”。

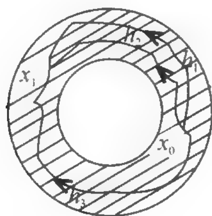


图1

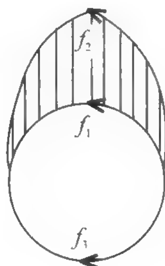


图2

当 h_2 的起点恰为 h_1 的终点，得到的道路称为 h_1 与 h_2 的乘积，记为 h_1h_2。显然，若 $h_1\simeq h_1'$，$h_2\simeq h_2'$，且 h_1 的终点恰为 h_2 的起点，则 $h_1h_2\simeq h_1'h_2'$。(1)

在有相同端点的所有道路的集合中，同伦关系是一个等价关系。道路 h 所在的道路类记为$[h]$。对于道路类也可以定义乘积：

$[h_1][h_2] = [h_1h_2]$，当然必须 h_1 的终点恰为 h_2 的起点才行。由(1)，两个道路类的乘积为两个类所确定，而与所选的代表无关。

当一条道路退化成一点 x_0，称之为常值道路(零伦)，记为 e_{x_0}。与道路 h 相反道路，称为 h 的逆道路，记为 h^{-1}。起点和终点重合(都是 x_0) 的道路，称为以 x_0 为基点的闭道路。闭道路提供了一个方便：具有相同基点的任意两条闭道路都可以相乘。

定义 1 在空间 X 中，取定一点 x_0，在以 x_0 为基点的全体闭道路集合中，按照同伦关系将它们分成互不相交的同伦类的集合记为 $\pi_1(X, x_0)$。

下面将上述内容进一步深化。广义的同伦是指连续函数间的连续变形，它是代数拓扑学的一个基本概念。

设 X、Y 都是拓扑空间。记 $C(X,Y)$ 是 X 到 Y 所有连续映射的集合，设 f、$g \in C(X,Y)$，如果有连续映射 $H: X \times I \to Y$，使得 $\forall x \in X, H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$，则称 f 与 g 同伦，记为 $f \simeq g$ (或 $f \overset{H}{\simeq} g$)。

例 1 $X = R^2 - \{0\}, f_1(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s), f_2(s) = (\cos \pi s, 2\sin\pi s), f_3(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$，则 $f_1 \simeq f_2: H(s,t) = (1-t)f_1(s) + tf_2(s)$(直线同伦)。但 f_1 与 f_3 不同伦 (图 2)。

例 2 (直线同伦) 设 f、$g \in C(X, E^m), H: X \times I \to E^m$ 为：$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$，由 E^m 中函数加法和数乘的连续性，则 $f \simeq g$。H 的直观意义是：t 从 0 变到 1 时，$f(x)$ 到 $g(x)$ 作匀速直线运动，称为直线同伦(图 3)。

例 3 f、$g \in C(X, S^n)$，使得 $\forall x \in X, f(x) \neq -g(x)$(即原点 $O \notin$ 线段$\overline{f(x)g(x)}$)。则可规定 f 到 g 的同伦 H 为：$H(x,t) = \dfrac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}$ (图 4)。

例 4　f、$g \in C(X, S^1)$，使得 $\forall x \in X, f(x) = -g(x)$，则 $f \simeq g$。连结 f 和 g 的一个同伦可构造如下：S 视为复平面上的单位圆，$H(x, t) = e^{it\pi} f(x)$，即把 $f(x)$ 绕原点转 $t\pi$ 角（$t \in R$）。

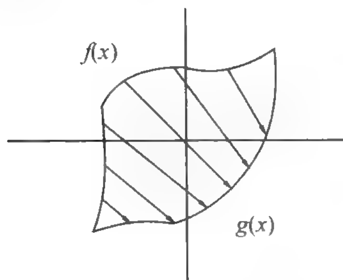


图3

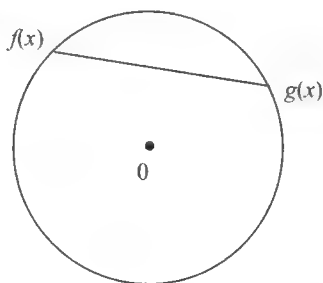


图4

例 5　X 为单点空间 $\{x\}$，$C(\{x\}, Y)$ 与 Y 之间有一个自然的一一对应：$f \leftrightarrow f(x)$，$\forall y \in Y$，记 f_y 是像点为 y 的映射，则 $f_{y_1} \simeq f_{y_2} \Leftrightarrow y_1$ 与 y_2 在 Y 中同一道路连通分支中，$\therefore C(\{x\}, Y)$ 的同伦类与 Y 的道路连通分支有一个一一对应的关系。特别地，当 Y 是道路连通时，$C(\{x\}, Y)$ 只有一个同伦类。

习　题

1. 证明在有相同端点所有道路的集合中，同伦关系是一个等价关系。

2. 证明如果连续映射 $f: X \to S^n$ 不满，则 f 零伦。

3. 证明如果连续映射 $f: S' \to S'$ 与恒同映射不同伦，f 有不动点。

4. 设 $y_1, y_2 \in Y$，f_{y_i} 是将 X 映为 $\{y_i\}$ 的常值映射。证明

$f_{y_1} \simeq f_{y_2} \Leftrightarrow y_1$ 与 y_2 在 Y 的同一道路分支中。

§2 基本群

空间 X 中取定一点 x_0，以 x_0 为基点的闭道路的全体同伦类的集合记为 $\pi_1(X, x_0)$。上节已对道路的同伦类定义了乘法，以下按群的定义说明 $\pi_1(X, x_0)$ 关于这个乘法运算构成一个群——一维同伦群或 Poincáre 群。

庞加莱（H. Poincáre, 1854 ~ 1912）法国数学家，代数拓扑的创始人。同伦和同调的思想是庞加莱在 1895 年的一篇论文中引进的。他的几何思想是惊人的。并在微分方程、复变函数、代数、代数几何、天体力学、数学物理、天文学和拓扑学方面都作出了重要贡献。庞加莱和希尔伯特齐名，同是他们那个时代的领先的数学家，写出了 30 本书和 500 多篇论文，文风平易近人。

首先，以 x_0 为基点的常值闭道路 e_{x_0} 所在的同伦类 $< e_{x_0} >$ 是单位元。对 $\pi_1(X, x_0)$ 中任一元 $< a >$，定义 $< e_{x_0} >< a > = < e_{x_0} a >$，其中 $e_{x_0} a$ 为闭路 a 的起点接在退化成一点的常值道路 e_{x_0} 的终点 x_0 上，仍为 a：$< e_{x_0} a > = < a >$，所以，$< e_{x_0} a > = < a >$，同理，$< a >< e_{x_0} > = < a >$。

其次，对 $\pi_1(X, x_0)$ 中任一元 $< a >$，则 aa^{-1} 可以连续地收缩为一点 x_0，$\therefore aa^{-1} \simeq e_{x_0}$ 即 $< a >< a^{-1} > = < e_{x_0} >$，同理，$< a^{-1} a > = < e_{x_0} >$。记 $< a^{-1} >$ 为 $< a >^{-1}$，所以 $< a >$ 有逆元 $< a >^{-1}$。

道路的乘法本身没有结合律：$(ab)c \neq a(bc)$。例如，$(ab)c$ 在 $I = [0,1]$ 的第一个 $\frac{1}{4}$ 段按 a 走，第二个 $\frac{1}{4}$ 段按 b 走，剩下的 $\frac{1}{2}$ 段是 c。而 $a(bc)$ 中 a 占了前 $\frac{1}{2}$，b 和 c 各占后面的 $\frac{1}{4}$，因此，从映射的角度看 $(ab)c \neq a(bc)$。但是，道路类乘法有结合律（证明留作

习题)。因此 $\pi_1(X,x_0)$ 是 X 的以 x_0 为基点的(一维)基本群。

例 1　X 为 E^m 中的凸集,$\forall x_0 \in X$,x_0 处的任意两条闭道路均同伦,所以 $\pi_1(X,x_0)$ 只有一个元素,记为$\{0\}$,它是平凡群。

道路连通且只有平凡群的拓扑空间称为单连通空间。线段、直线、正方形片、圆盘、平面、球面、实心球体、实心凸多面体和凸多面体表面均为单连通的。显然,单连通是区别不同胚的一类性质中最自然的一个。例如,S^2(球面) $\not\cong$ T^2(环面),因为后者非单连通。

X 的所有道路在定端同伦下分成的等价类称为 X 的道路类。

X 的所有道路类的集合记为$[X]$,由连续映射 $f:X \to Y$ 可导出一个对应$f_\pi:[X] \to [Y]$ 为 $f_\pi(<a>) = <f \circ a>$,当 a,b 可乘时,$f \circ a$ 与$f \circ b$也可乘,且$(f \circ a) \circ (f \circ b) = f \circ (ab)$,$(f \circ a)^{-1} = f \circ a^{-1}$。设 $\alpha = <a>$,$\beta = <b>$,于是

$f_\pi(\alpha\beta) = <f \circ (ab)> = <(f \circ a) \circ (f \circ b)> = <f \circ a><f \circ b> = f_\pi(\alpha)f_\pi(\beta)$

$(f_\pi(\alpha))^{-1} = <f \circ a>^{-1} = <(f \circ a)^{-1}> = <f \circ a^{-1}> = f_\pi(<a^{-1}>) = f_\pi(<a>^{-1}) = f_\pi(\alpha^{-1})$

上两式说明 f_π 是保持乘法运算的对应。如果 $x_0 \in X$,$y_0 = f(x_0)$,则当 $\alpha \in \pi_1(X,x_0)$ 时,$f_\pi(\alpha) \in \pi_1(Y,y_0)$。因此,$f_\pi$ 在 $\pi_1(X,x_0)$ 上的限制$f_\pi:\pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$是一个同态,它是由 f 诱导出的基本群之间的同态。若 $f:X \to Y$ 是同胚,$x_0 \in X$,$y_0 = f(x_0)$,则 $f_\pi:\pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ 是同构(注意,若点 x_0 可以任意取,对每一点都有一个同态,均记为 f_π)。因此,如果 X 与 Y 的基本群不同构,则 X 与 Y 不同胚,即作为代数结构的基本群是拓扑空间 X 的拓扑不变量。发现并研究基本群这一不变量归功于 Poincáre。研究基本群时,通常考虑道路连通空间。当 x_0,x_1 同属于 X 的一个道路分支时,$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$。这个同构型就叫做

X 的基本群，不必特别指明基点，记为 $\pi_1(X)$。

习　题

1. 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 都是连续映射，$X_0\in X$，$y_0=f(x_0)$，$z_0=g(y_0)$，证明：$(g\circ f)\pi=g_\pi\circ f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Z,z_0)$。

2. 证明：若 $f:X\to Y$ 是同胚映射，$x_0\in X$，$y_0=f(x_0)$，则 $f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$是同构。

3. 设 X 是平庸拓扑空间，$x_0\in X$，证明 $\pi_1(X,x_0)$是平凡群；若 X 是离散空间，结论也成立。

4. x_0,x_1 是拓扑空间 X 的同一道路分支中的两点，ω 为从 x_0 到 x_1 的一个道路类。$\forall\alpha\in\pi_1(X,x_0)$，$\omega^{-1}\alpha\omega\in\pi_1(X,x_1)$，定义 $\omega_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$为 $\omega_\#(\alpha)=\omega^{-1}\alpha\omega$。证明

(1)如果 ω'是从 x_1 到 x_2 的道路类，则$(\omega\,\omega')_\#=\omega'_\#\circ\omega_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X_1,x_2)$。

(2)$\omega_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$是同构：$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$。

(3)设 ω,ω'是 x_0 到 x_1 的两个道路类，证明 $\omega_\#=\omega'_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)\Leftrightarrow\omega\,\omega'^{-1}$与任一 $\alpha\in\pi_1(X,x_0)$都可交换：$\omega\,\omega'^{-1}\alpha=\alpha\,\omega\,\omega'^{-1}$。

(4)证明：从 x_0 到 x_1 的任一道路类决定相同的同构$\Leftrightarrow\pi_1(X,x_0)$是交换群。

5. 证明：道路类的乘法有结合律。

§3　基本群的计算

由上节讨论得到圆盘 X 中以任一点 x_0 为基点的闭道路的同

伦类只有一个即 $<e_{x_0}>$，也就是 $\pi_1(X,x_0)$ 中只包含一个元素即单位元，圆盘的基本群为平凡群。同样的球面的基本群也是平凡群。下面考虑 S^1（圆周）的基本群。

将 S^1 看作复平面上的单位圆，取 $z_0=1$ 为 S^1 的基点，以 z_0 为基点的任一条闭道路，若在某一段弧上先以一个方向通过一次，然后紧接着折回来以相反的方向再通过一次，则可以通过连续变形将它"熨平"。经过熨平的闭道路和原来的闭道路是同伦的。因此，以下仅讨论 S^1 上熨平以后的闭道路有多少同伦类。显然，环绕 S^1 圈数不同的闭道路是不同伦的，方向不同的闭道路也是不同伦的，即圈数是判断 S^1 上闭道路是否同伦的数量标志。由此得出 S^1 上的基本群 $\pi_1(S^1)$ 和整数加群 Z 同构：$\pi_1(S^1)\cong Z$。下面给出用初等方法计算 $\pi_1(S^1)$ 的严格的数学证明。

定义指数映射 $p:E^1\to S^1:p(t)=e^{i2\pi t}$。$p$ 的直观意义是将 E^1 绕在 S^1 上（但长度改变了 2π 倍）。利用 p 将 S^1 上以 $z_0=1$ 为基点的闭道路类对应于 E^1 中以 O 点为起点的道路类。p 在局部上是同胚的，记 $J_t=(t,t+1)$，$p_t=p\,|\,J_t:J_t\to S^1-\{e^{i2\pi t}\}$ 为同胚映射；并且 $p^{-1}(S^1-\{e^{i2\pi t}\})=\bigcup_{n\in Z}J_{t+n}$（图 1）。

对拓扑空间 X，$f:X\to S^1$ 连续，如果存在 X 到 E^1 的连续映射 $\tilde{f}:X\to E^1$ 满足 $p\circ\tilde{f}=f$，即映射图表可以交换（如图 2），则称 $\tilde{f}$ 是 f 的一个提升。例如取 $X=I$，道路 $a_i:I\to S^1(i=1,2,3)$ 为 $a_1(t)=e^{\pi it}$，$a_2(t)=e^{-\pi it}$，$a_3(t)=e^{4\pi it}$，它们的提升 $I\to S^1$ 分别为 $\tilde{a}_i(i=1,2,3)$；$\tilde{a}_1=\dfrac{t}{2}$，$\tilde{a}_2=-\dfrac{t}{2}$，$\tilde{a}_3=2t$。（图 3）

引理 1　如果 f 不满，$x_1\in X$，$t_1\in E^1$ 使得 $p(t_1)=f(x_1)$，则存在 f 的提升 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}(x_1)=t_1$。

证明　由于 f 不满，可取 $z=e^{i2\pi t}\in f(X)$，则 $f(X)\subset S^1-\{z\}$，由于 $p(t_1)=f(x_1)\neq z$，存在整数 n 使得 $t_1\in J_{t+n}$（图 4）。若

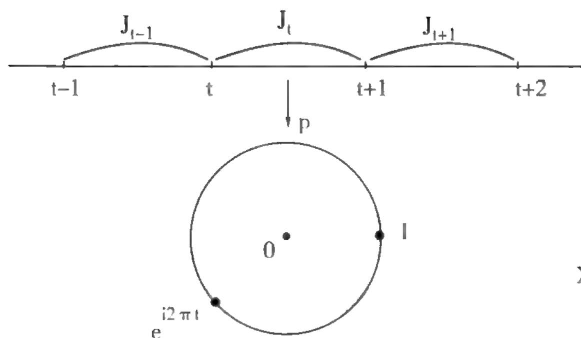


图1

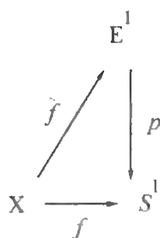


图2

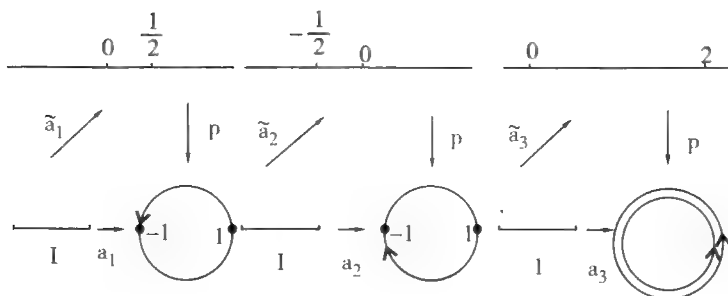


图3

令 $i_{t+n}: J_{t+n} \to E^1$ 为包含映射，定义 $\tilde{f} = i_{t+n} \circ p_{t+n}^{-1} \circ f$。于是 $\tilde{f}$ 连续，且 $p \circ \tilde{f} = p \circ i_{t+n} \circ p_{t+n}^{-1} \circ f = p_{t+n} \circ p_{t+n}^{-1} \circ f = f$。且由 $p \circ i_{t+n} = p_{t+n}$，$\tilde{f}(x_1) = i_{t+n} \circ p_{t+n}^{-1} \circ f(x_1) = i_{t+n} \circ p_{t+n}^{-1} \circ p(t_1) \doteq i_{t+n} \circ p_{t+n}^{-1} \circ p_{t+n} \circ i_{t+n}^{-1}(t_1) = t_1$。

引理2 设 a 是 S^1 上的道路，$t_0 \in E^1$，使得 $p(t_0) = a(0) \in S^1$，则存在唯一的提升 $\tilde{a}$，使 $\tilde{a}(0) = t_0$。

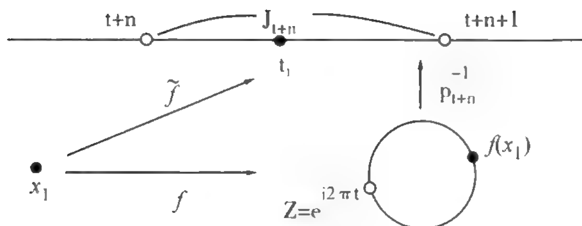


图4

证明 存在性。取自然数 m,将 I 等分成 m 个小区间:$I_1,I_2,\cdots,I_m$($I_i=[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]$)使得 $a|_{I_i}$ 不满($i=1,2,\cdots,m$)。由引理1,可顺次定义 $a|_{I_i}$ 上的提升 $\tilde{a}_i$,使 $\tilde{a}_1(0)=t$。$\tilde{a}_{i+1}(\frac{i}{m})=\tilde{a}_i(\frac{i}{m})$($i=1,2,\cdots,m$),即 $\tilde{a}_{i+1}$ 与 $\tilde{a}_i$ 在 $\frac{i}{m}$ 处取值相同。由粘接引理,将各个 $\tilde{a}_i$ 合并成映射 $\tilde{a}:I\to E^1$ 是连续的。它是 a 的提升,且 $\tilde{a}(0)=\tilde{a}_1(0)=t_0$。

唯一性。设 $\tilde{a}$、$\tilde{a}^1$ 都是 a 的提升:$p(\tilde{a}^1(t))=a(t)=p(\tilde{a}(t))$。作 $f=\tilde{a}^1-\tilde{a}:I\to E^1$。$\forall t\in I$,对指数映射 $e^{i2\pi f(t)}=p(f(t))=p(\tilde{a}^1(t)-\tilde{a}(t))=\dfrac{p(\tilde{a}^1(t))}{p(\tilde{a}(t))}=\dfrac{a(t)}{a(t)}=1$。因此,$f(t)$ 是取整数的连续函数。由于 I 连通,$f(t)$ 一定是常值函数。如果 $\tilde{a}^1(0)=\tilde{a}(0)$ 则 $f(0)=0$,从而 $f(t)\equiv0$。即 $\tilde{a}^1(t)-\tilde{a}(t)\equiv0$。于是 $\tilde{a}^1=\tilde{a}$,证毕。

由唯一性的证明中,可知同一道路 a 的两个提升 $\tilde{a}$ 与 $\tilde{a}^1$ 相差一个常数 M:$\tilde{a}^1(1)-\tilde{a}(1)=\tilde{a}^1(0)-\tilde{a}(0)=M$。从而 $\tilde{a}^1(1)-\tilde{a}^1(0)=\tilde{a}(1)-\tilde{a}(0)$。所以 $\tilde{a}(1)-\tilde{a}(0)$ 是与提升 $\tilde{a}$ 的选择无关,完全由 a 决定的常数。如果 a 是基点为 z_0 的闭路,就称这个常数为

a 的圈数，记作 $q(a) = \tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)$，这里 $\tilde{a}$ 是 a 任一的提升，$q(a)$ 是整数（因为 $\tilde{a}(0)$ 和 $\tilde{a}(1)$ 都是整数）。

引理 3 a、b 是 S^1 上基点为 z_0 的两条闭路，使得 $\forall t \in I$，$a(t) \neq -b(t)$，则 a、b 的圈数相同：$q(a) = q(b)$（引理 3 的逆否命题说明这样一个几何意义：若 a 与 b 的圈数不相同，必有 $t_0 \in I$，使 $a(t_0)$ 与 $b(t_0)$ 为对径点）。

证明 由引理 2 取 a、b 的提升 $\tilde{a}$、$\tilde{b}$，使得 $\tilde{a}(0) = \tilde{b}(0)$。定义 $f = \tilde{a} - \tilde{b}$，则 f 是 I 上的连续函数，$f(0) = 0$。如果 $q(a) \neq q(b)$，不妨设 $q(a) > q(b)$，则 $f(1) = \tilde{a}(1) - \tilde{b}(1) = \tilde{a}(1) - 0) - (\tilde{b}(1) - 0) = q(a) - q(b)$ 是自然数，从而有 $t \in I$，使得 $f(t) = \dfrac{1}{2}$，即 $\tilde{a}(t) = \tilde{b}(t) + \dfrac{1}{2}$。于是 $a(t) = e^{i2\pi\tilde{a}(t)} = -e^{i2\pi\tilde{b}(t)} = -b(t)$，与条件矛盾。

引理 4 a、b 是 S^1 上基点为 z_0 的闭路，则 $q(a) = q(b) \Leftrightarrow a \simeq b$（圈数是 S^1 上闭道路同伦的数量标志）。

证明 $\Leftarrow$ 设 $H(s,t): a \simeq b$，由于 H 一致连续，$\exists \delta > 0$，使得 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时，$\forall s \in I, H(s,t_1) \neq -H(s,t_2)$，由引理 3，$q(H(s,t_1)) = q(H(s,t_2))$，于是 $q(H(s,t))$ 不依赖于 t，$q(a) = q(H(s,0)) = q(H(s,1)) = q(b)$。

$\Rightarrow$ 作 $\tilde{a}$、$\tilde{b}$ 是 a、b 的提升，使得 $\tilde{a}(0) = \tilde{b}(0) = 0$，则 $\tilde{a}(1) = \tilde{a}(1) - 0 = \tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) = q(a) = q(b) = \tilde{b}(1) - \tilde{b}(0) = \tilde{b}(1) - 0 = \tilde{b}(1)$。因此 $\tilde{a}$、$\tilde{b}$ 是 E^1 上有相同起终点的道路，从而 $\tilde{a} \simeq \tilde{b}$，$a = p \circ \tilde{a} = p \circ \tilde{b} = b$。证毕。

定理 1 $\pi_1(S^1, z_0)$ 是自由（无限）循环群 Z。

证明 设 $\alpha \in \pi_1(S^1, z_0)$，取 $q(\alpha) = q(a)$，$a \in \alpha$，得到映射 $q: \pi_1(S^1, z_0) \to Z$，设 $\alpha = \langle a \rangle$，$\beta = \langle b \rangle$，作 a、b 的提升 $\tilde{a}$、$\tilde{b}$，使得 $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(0) = 0$，则 $\tilde{a}\tilde{b}$ 是 ab 的提升，其起终点为 $\tilde{a}(0)$ 和

$\tilde{b}(1)$，于是 $q(\alpha\beta)=q(ab)=\tilde{b}(1)-\tilde{a}(0)=\tilde{b}(1)-\tilde{b}(0)+\tilde{a}(1)-\tilde{a}(0)=q(a)+q(b)=q(\alpha)+q(\beta)$，这说明 q 是同态。引理 4 说明 q 是单射。记 $a_0:I\to S^1$ 为 $a_0(t)=e^{i2\pi t}$。显然 $q(a_0)=1$，即 $q(<a_0>)=1$。对任何正整数 n，$q(<a_0>^n)=n$，$q(<\tilde{a}_0>^n)=-n$，因此，q 又是满射。$\therefore q$ 是同构，即 $\pi_1(S^1,z_0)$ 是由 $<a_0>$ 生成的自由无限循环群，同构于 Z。

S^1 的基本群经常作为求其他空间基本群的基础。下面求环面 $T^2=S^1\times S^1$ 的基本群。先证明关于乘积空间基本群的一个定理。

定理 2 $x_0\in X, y_0\in Y$，则 $\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\cong\pi_1(X,x_0)\times\pi_2(Y,y_0)$（右边记号“×”表示群的直积，即对两个群 H_1 和 H_2，集合 $H_1\times H_2=\{(h_1,h_2)\mid h_i\in H_i, i=1,2\}$，其中的群的运算由 $(h_1,h_2)\overset{=}{\circ}(h_1',h_2')=(h_1\overset{\cdot}{\circ}h_1',h_2\overset{-}{\circ}h_2')$ 规定）。

证明 规定 $\varphi:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$ 为

$$\varphi(\gamma)=((j_x)_\pi(\gamma),(j_y)_\pi(\gamma)),\ \forall\gamma\in\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$$

其中 j_x 和 j_y 分别是 $X\times Y$ 到 X 和 Y 的投射，φ 显然是同态。

φ 是满同态：$\forall\alpha=<a>\in\pi_1(X,x_0)$，$\beta=<b>\in\pi_1(Y,y_0)$。作 $X\times Y$ 中的闭路 c 为 $c(t)=(a(t),b(t))$，则 $(j_x)_\pi(<c>)=<j_x\circ c>=<a>=\alpha$。同样地，$(j_y)_\pi(<c>)=\beta$。于是 $\varphi(<c>)=(\alpha,\beta)$。

φ 是单同态：设 $\varphi(\gamma)=1$，$c\in\gamma$，于是 $j_x\circ c\simeq e_{x_0}$，$j_y\circ c\simeq e_{y_0}$。记 $H:j_x\circ c\simeq e_{x_0}$，$G:j_y\circ c\simeq e_{y_0}$，规定 $F:I\times I\to X\times Y$ 为 $F(s,t)=(H(s,t),G(s,t))$，容易验证 $F:c\simeq e$（e 为 (x_0,y_0) 处的点道路），因此 $\gamma=<c>=1$。证毕。

应用此定理到 T^2 上，得到 $\pi_1(T^2)\cong Z\times Z$（一般地，对任何正整数 n，有 $\pi_1(T^n)\cong\underbrace{Z\times\cdots\times Z}_{n个}=Z^n$）于是，$T^2\not\cong S^2$。

例 1 S^1 不是圆盘 D^2 的收缩核。

证明 反证法。S^1 是 D^2 的收缩核，即存在一个把圆盘变成它的边界圈的连续变换 $r:D^2\to S^1$ 且 $r|_{S^1}=id_{S^1}$。记包含映射 $i:S^1\to D^2(\forall x\in S^1, i(x)=x)$，则 $r|_{S^1}=r\circ i$。由 $S^1\xrightarrow{i}D^2\xrightarrow{r}S^1$，给出 $\pi_1(S^1)\xrightarrow{i_\pi}\pi_1(D^2)\xrightarrow{r_\pi}\pi_1(S^1)$ 且 $(r\circ i)_\pi=r_\pi\circ i_\pi$。又因为 $r\circ i=id_{S^1}$。所以诱导同态 $r_\pi\circ i_\pi$ 是 $\pi_1(S^1)$ 上的恒等同态。另一方面，$\pi_1(S^1)\cong Z$，$\pi_1(D^2)=\{0\}$。即 $Z\xrightarrow{i_\pi}\{0\}\xrightarrow{r_\pi}Z$，于是 $r_\pi\circ i_\pi$ 把 Z 中每一元变为 0，这与 $r_\pi\circ i_\pi$ 是恒等同态矛盾。

本例说明一个事实，即不可能把一个圆盘连续地变成它的圆周，而使圆周上的每一点保持不动。（否则非要把圆盘撕破不可。）其证明方法是代数拓扑中一个典范。原来的几何问题是困难的，但一旦转化为代数问题，只用非常简单的思想就把问题解决了。代数拓扑把拓扑空间中的图形与代数中的群论联系起来，即通过群和群的系列来描述它所联系的图形的几何结构，这是数形结合思想的升华。

习　题

1. 证明：圆盘上的任一连续变换至少有一个不动点（Brouwer 不动点定理）。

2. 设对径映射 $f:S^1\to S^1$ 为 $f(z)=-z$，试描述同态 $f_\pi:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,-1)$。

3. 设映射 $f:S^1\to S^1$ 规定为 $f(z)=z^n$（n 为整数），试描述同态 $f_\pi:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,1)$。

§4 拓扑空间的同伦等价

定义 X、Y为拓扑空间，如果存在连续映射$f:X\to Y$和$g:Y\to X$，使得：

$g\circ f\simeq id_X:X\to X$($g\circ f$为$X$上零伦)和$f\circ g\simeq id_Y:Y\to Y$($f\circ g$为$Y$上零伦)则称$X$与$Y$同伦等价：$X\simeq Y$，且记$g=f^{-1}$。

同伦等价是拓扑空间之间的等价关系，以传递性为例，$X\overset{f}{\simeq}Y$，$Y\overset{g}{\simeq}Z$。令$\varphi=g\circ f:X\to Z$，$\psi=f^{-1}g^{-1}:Z\to X$，则$\psi\circ\varphi=f^{-1}g^{-1}gf\simeq f^{-1}f\simeq id_X:X\to X$。同理$\varphi\circ\psi\simeq id_Z:Z\to Z$。因此，$X\overset{\varphi}{\simeq}Z$。

每个同胚映射$X\cong Y$都是同伦等价：$X\cong Y\Rightarrow X\simeq Y$，但$X\simeq Y\Rightarrow X\cong Y$不成立，也就是说，同伦等价比同胚等价更广泛，每个同伦等价类含若干个同胚等价类。

例1 图形0、1、2、3、4、5、6、7、8、9按同胚分类为：{0}、{1,2,3,5,7}、{4}、{6,9}、{8}，按同伦分类为{0,4,6,9}、{1,2,3,5,7}、{8}。

例2 $X=S^1$，$L=\{(x,0)\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$Y=X\cup L$。则$X\ncong Y$(考虑连通性)。但$X\simeq Y$，事实上，定义$f:X\to Y$和$g:Y\to X$如下：

$$f(x)=x,g(y)=\begin{cases}y & y\in S^1\\(1,0) & y\in L\end{cases}$$

则f、g连续，且$g\circ f=id_X$，$f\circ g\simeq id_Y$。

例3 $E^1\simeq E^2$。

记$f:E^2\to E^1$为投射$f(x,y)=x$，$g:E^1\to E^2$为$g(x)=(x,0)$，则$f\circ g=id_{E^1}:E^1\to E^1$，$g\circ f\simeq id_{E^2}:E^2\to E^2$。这只需规定$H:E^2\times I\to E^2$为$H((x,y),t)=(x,ty)$，则$g\circ f\overset{H}{\simeq}id_{E^2}$。显然$E^1\ncong$

E^2。

例 4 对任何拓扑空间 X,有 $X\times I\simeq X$,特别地,平环 $S^1\times I$ 与 S^1 同伦等价。

记 $f:X\times I\to X$ 是投射 $f(x,t)=x$,$g:X\to X\times I$ 为 $g(x)=(x,0)$ 则 $f\circ g=id_X:X\to X$,$g\circ f\simeq id_{X\times I}:X\times I\to X\times I$(规定 $H:(X\times I)\times S\to X\times I$ 为 $H((x,t),s)=(x,st)$ 则 $s=1$ 时,$(x,t)\to(x,t)$,为 $id_{X\times I}$,$s=0$ 时,$(x,t)\to(x,0)$,为 $g\circ f$。即 $g\circ f\overset{H}{\simeq}id_{X\times I}$)。

两个同伦等价的空间,也有同构的基本群,即有以下命题:$f:X\to Y$ 同伦等价,$x_0\in X$,$y_0=f(x_0)$,则 $f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 是同构(证明略)。从而有 $X\simeq Y$,且它们道路连通,则 $\pi_1(X)\cong\pi_1(Y)$。

于是可把计算一个空间的基本群问题转化为例如 S^1 的基本群:平环 $\simeq S^1$,从而平环的基本群是 Z。

根据这个命题,还可判断空间不同伦等价。例如平环和圆盘 D^2($\pi_1(D^2)$ 为平凡群)不同伦,T^2 和 S^2 不同伦。

例 5 (代数基本定理)复数域上次数大于 0 的一元多项式必有根。

证明 反证法。设 $p_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 在复平面上无根,则 $a_0\neq 0$,不妨设 $a_n=1$,$\forall r>0$,规定 $f_r:S^1\to S^1$ 为 $\dfrac{p_n(rz)}{\|p_n(rz)\|}(z\in S^1)$,则对任一 r,$f_r\simeq f_0$,$f_0=\dfrac{a_0}{\|a_0\|}$ 为常值映射,于是 f_r 零伦,但当 $r\to+\infty$ 时,$f_r(z)\to z^n$,从而当 r 充分大时,$f_r\simeq h_n$,这里 $h_n:S^1\to S^1$ 为 $h_n(z)=z^n(z\in S^1)$,h_n 不是零伦($(h_n)_\pi$ 不是平凡同态),矛盾。

习　题

1. 设 Y 道路连通，且 $\pi_1(Y)$是交换群。如果 $f\simeq g:X\to Y$，并且对 $x_0\in X$，$f(x_0)=g(x_0)=y_0$，则 $f_\pi=g_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$

2. 设 $f:X\to Y$ 是一个同伦等价，则 f 的所有同伦逆构成 Y 到 X 的一个映射类。

3. 证明：与道路连通空间同伦等价的拓扑空间也是道路连通的。

4. $\pi_0(X)$表示空间 X 的道路分支的集合。证明若 $X\simeq Y$，则 $\pi_0(X)$与 $\pi_0(Y)$之间可建立一一对应。

§5　形变收缩核

形变收缩核是同伦等价的特例。例如，平环 $A=\{x\in R^2|1\leqslant\|x\|\leqslant 2\}$，其形变收缩核为 S^1，收缩映射 $r=\frac{x}{\|x\|}$，$x\in A$，$A\simeq S^1$。又如 D^n 是 R^n 的形变收缩核，S^n 是 $R^{n+1}-\{0\}$ 的形变收缩核。令 $p=(-1,0)$，$q=(1,0)$，则 ∞ 字形：$S^1\vee S^1$ 是 $R^2-\{p,q\}$ 的形变收缩核，图 1 显示了 $R^2-\{p,q\}$ 连续地变为 ∞ 字形的过程。

定义　A 是 X 的子空间，$i:A\to X$ 是包含映射，如果存在收缩映射 $r:X\to A$(即 $r\circ i=id_A:A\to X\to A$)，使得 $i\circ r\simeq id_X:X\to X$，就称 A 是 X 的一个形变收缩核。

显然，r 与 i 是一对互为同伦逆的同伦等价的，$A\simeq X$。下面解释 $i\circ r\simeq id_X$。

设 H 是从 id_X 到 $i\circ r$ 的一个同伦，则 $H(x,0)=x,\forall x\in X$，$H(x,1)\in A,\forall x\in X,H(a,1)=a,\forall a\in A$。$H$ 称为从 X 到 A 的

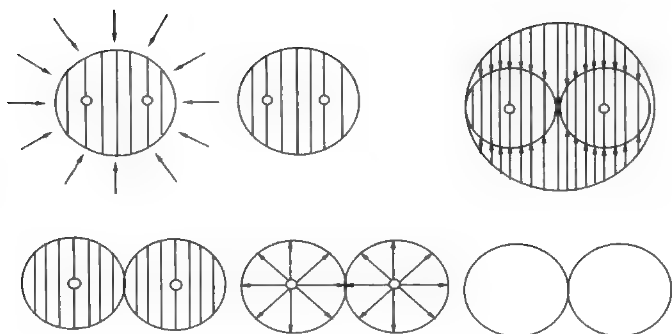
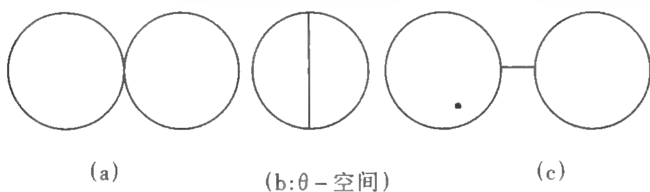


图1

形变收缩，且 $i \circ r(x) = H(x,1), id_X = H(x,0)$。注意，$t \neq 0,1$ 时，A 中的点在收缩过程中可以变动。

例 1 图 2 中三个图形均为 R^2 挖去两点后的形变收缩核，除 (a) 外，(b)、(c) 的收缩过程请读者考虑，它们互相同伦等价，但互相不同胚。



(a) (b:θ－空间) (c)

图 2

例 2 $D^2 \times \{0\} \cup S^1 \times I$(即圆柱的底面和侧面)是 $D^2 \times I$(圆柱体)的形变收缩核，以点 $p(0,0,2)$ 为中心作中心投射 r，将 $D^2 \times I$ 上各点映射到 $D^2 \times \{0\} \cup S^1 \times I$ 上，r 是收缩映射(图 3)。

X 到 A 的一个形变收缩 H 的如果保持 A 中的点不动，即 $H(a,t) = a, \forall a \in A, t \in I$，称 A 是 X 的强形变收缩核。上面的诸例均

为强形变收缩(核)。M.Fuchs 证明了 X $\simeq$ Y 的充要条件是,存在拓扑空间 Z,使得 X 和 Y 分别同胚于 Z 的两个强形变收缩核,这说明同伦等价直接或间接地和形变收缩核概念有关。

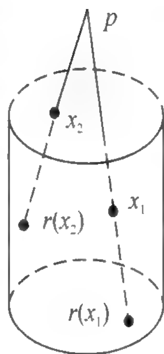


图3

例 3 (不是强形变收缩的形变收缩) X 是 R^2 的"篦形子集",$X=\{(x,y)\mid x$ 有理数,或 $y=0\}$,$A\subset X$ 为 Y 轴(图 4),规定 X 到 A 的形变收缩 H 为

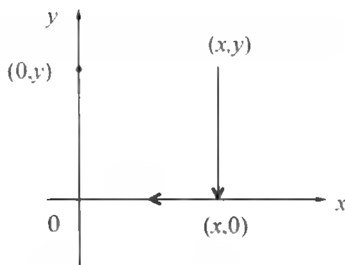


图4

$$H((x,y),t)=\begin{cases}(x,(1-3t)y) & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{3}\\ ((2-3t)x,0) & \dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{2}{3},\\ (0,(3t-2)y) & \dfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

H 即为所求。注意,当 $0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{3}$ 时,y 轴的点在移动。

利用连通性,易知 R^1 与 R^n 不同胚。下面说明 R^2 与 $R^n(n>2)$ 不同胚。事实上,$R^n-\{0\}(n>2)$ 和 S^{n-1} 同伦型(S^{n-1} 是 $R^n-\{0\}$ 的强形变收缩核)。$R^n-\{0\}$ 单连通,但 $R^2-\{0\}$ 不是单连通($\because S^1$ 不是单连通),于是 R^2 与 $R^n(n>2)$ 不同胚。推广到高维情形,R^m

与 $R^n(m \neq n)$ 不同胚。

习 题

1. 若 B 是 A 的形变收缩核，A 是 X 的形变收缩核，则 B 也是 X 的形变收缩核。

2. 若 $B \subset A \subset X$，A 是 X 的收缩核，B 是 X 的形变收缩核，则 B 也是 A 的形变收缩核。

3. 若 X_1, X_2 是 X 的两个闭子集，$X_1 \cup X_2 = X$，$X_0 = X_1 \cap X_2$ 非空，且是 X 的形变收缩核，则 X_0 也是 X_1 和 X_2 的形变收缩核。

4. 设 X 是 Möbius 带，A 是它的边界，$x_0 \in A$。证明包含映射 $i: A \to X$ 诱导的同态 $i_\pi: \pi_1(A, X_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 不是同构。

5. 证明 Möbius 带的边界 A 不是它的收缩核。

6. 设 x_0 是 D^n 的边界 S^{n-1} 上一点，证明 $S^{n-1} - \{x_0\}$ 是 $D^n - \{x_0\}$ 的形变收缩核。

7. 证明 $E^2 \not\cong E^n (n > 2)$。

8. 证明 $D^2 \not\cong D^n (n > 2)$。

9. 设 l 是 E^3 中一条直线，证明 $\pi_1(E^3 - l)$ 是自由循环群。

§6 商空间和曲面的多边形表示

一个集合 X 上有等价关系 R，X/R 为商集，映射 $p: X \to X/R$ 称为粘合映射，p 是满射。设 X 已有拓扑 τ，下面定义商拓扑，使 X/R 成为一个拓扑空间 —— 商空间。

定义 设 (X, τ) 为拓扑空间，Y 为一非空集合，$f: X \to Y$ 为满射，Y 的子集族 $\tilde{\tau} = \{V \subset Y: f^{-1}(V) \in \tau\}$ 为 Y 的拓扑，称 $\tilde{\tau}$ 为 Y 的（相对于 f 及 τ 而言的）商拓扑。

定理 1 设 $\tilde{\tau}$ 为 Y 的相对于映射 f 及 X 的拓扑 τ 而言的商拓扑，

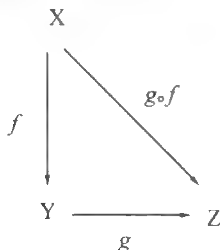
则

(1)$f: X \to Y$ 连续。

(2) 若 τ^1 为 Y 的另一拓扑，且对 τ^1 而言 $f: X \to Y$ 连续，则 $\tau^1 \subset \tau$(商拓扑是使 f 连续的最大拓扑)。

证明 仅证(2)。若 $V \in \tau^1$，由于 f 对 τ^1 而言连续，故 $f^{-1}(V) \in \tau$，即 $V \in \bar{\tau}$，$\therefore \tau^1 \subset \bar{\tau}$。

定理 2 设 X、Y、Z 为拓扑空间，且 Y 的拓扑为对于给定映射 $f: X \to Y$ 及 X 的拓扑而定的商拓扑，则任一映射 $g: Y \to Z$ 连续 $\Leftrightarrow g \circ f: X \to Z$ 连续(见交换图表)。



证明 仅证 $\Leftarrow$。若 $g \circ f$ 连续，W 为 Z 的开集，则 $(g \circ f)^{-1}(W)$ 为 X 的开集，但 $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1})(W))$，$Y$ 为商空间，$g^{-1}(W)$ 为 Y 的开集，即 g 连续。

定理 3 X、Y 为拓扑空间，$f: X \to Y$ 为在 X 上的连续开映射，则 Y 的拓扑为对于 f 及 X 的拓扑而言的商拓扑。

证明 若 V 为 Y 的开集，f 连续，$f^{-1}(V)$ 为 X 的开集。即 V 为 Y 的对商拓扑而言的开集。反之，若 V 为 Y 的对商拓扑而言的开集，则 $f^{-1}(V)$ 为 X 的开集。由于 f 是在上的映射，故 $V = f(f^{-1}(V))$ 为 Y 的开集，故 Y 上的拓扑为商拓扑。

拓扑空间 X 有某种性质 P 时，若 X 的任一商空间 X/R 也具有性质 P，则称 P 为可商性质。例如，连通、道路连通、紧致、可分、

Lindelöf 等均为可商性质。事实上,凡经过连续映射保持不变的性质必为可商性质。

例 1 (不可商性质):在实数空间 R^1 中,将开区间(0,1)中所有点粘成一点,其余的点视为自身,得到一个商空间 R^1/R:$t_1Rt_2 \Leftrightarrow t_1、t_2 \in (0,1)$ 或 $t_1 = t_2$。考察商空间 R^1/R,点 $[1]_R$ 与 $[\frac{1}{2}]_R$,前者不存在不包含后者的开邻域。所以 R^1/R 不是 T_1 空间。单点集 $\{[1]_R\}$ 与 $\{[0]_R\}$ 都是 R^1/R 中的闭集($\because \{0\},\{1\}$ 为 R^1 中闭集)但没有不相交的邻域。因而 R^1/R 不是 T_2、正则、T_3、T_4 空间。于是,上述各种性质均不是可商性质。

由于 $p: X \to X/R$ 为满射,所以可给予 X/R 以商拓扑使之成为拓扑空间。商空间的几何直观是用粘合法构造几何曲面,这种方法在代数拓扑中是很有用的,扩大了我们关于曲面的眼界,丰富了几何的空间想象力。

例如,X 为圆柱面,用 X 粘合为环面 T^2(每一直母线两端粘合)的过程记为连续映射 f。R 为粘合决定的等价关系,$g: X/R \to T^2$ 是相应的一一对应关系(每一直母线两端点粘合为 T^2 上一个点,直母线上其余的点对应自身)。因为 $f = g \circ p$ 连续,即有 g 连续。由于 X 紧致和 p 连续,X/R 紧致,而 T^2 是 Hausdorff 空间,故 g 为同胚。即从拓扑的意义上,环面 T^2 即商空间 X/R(图 1)。今后,我们直接用商空间的概念来理解粘合的方法,而不论它在直观上能否被接受。例如,把圆盘 D^2 的边界 S^1 上的每一对对径点粘合(曲面自身不能相交)得到射影平面(图 2),这在 R^3 中是做不到的,只能在 R^4 中实现。

以下考虑曲面的多边形表示,介绍 R^2 中的平环,R^3 中的 Möbius 带和环面,R^4 中的射影平面和 Klein 瓶。把矩形弯曲并将画有箭头的两侧边上高度相同的点粘接得到一截圆柱面,通过中心正投影它同胚于平面上由两个同心圆所夹的环带 —— 平环

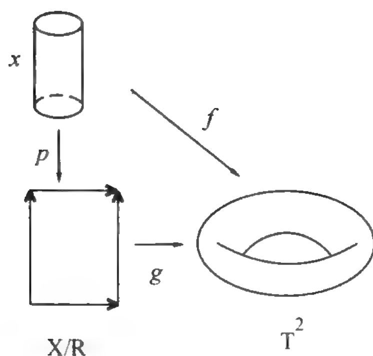


图1

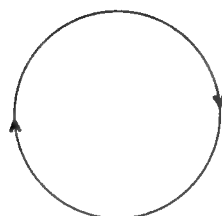
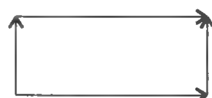
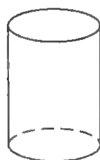


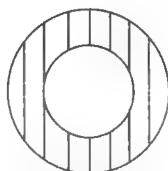
图2

(图 3)。若将截圆柱面的两个截口互相粘接可得到环面 T^2,粘接过程中,每一直母线段的两端粘合,两个截口是以相同的方向粘接的(图 4)。









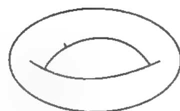


图3

图4

下面换一种粘接方法。对矩形先拧转 180° 再将两侧边粘接,得到的曲面为 Möbius 带(图 5)。而将截圆柱面两个截口方向相反

地粘接,则得到 klein 瓶(图 6)。

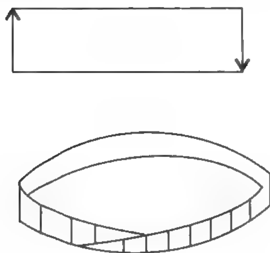


图5

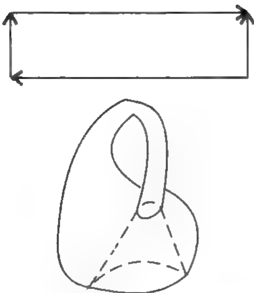


图6

Möbius 带是单侧曲面的典型例子,也叫做不可定向。Klein 瓶的粘接过程在 3 维空间中是做不到的,因为必须将圆柱面弯曲后把一端穿过管壁进入管内与另一端相接,而在进入管内之处必然要相交。但在 4 维空间中可以实现(让交点的第四个坐标不同,犹如平面上两相交直线放在三维空间中,让交点的第三个坐标不同就不相交)。

Klien 瓶的单侧性可以通过 Möbius 带的单侧性来理解:将两个 Möbius带沿它们的边缘粘合起来所得曲面同胚于 Klein 瓶。Klein 瓶是由图 6 所示的一个长方形将两对对边按箭头方向相同粘合起来得到的。将图 7(a) 中的上面的矩形沿中线 AA 剪开,分为 Ⅰ、Ⅲ 两块,再将矩形 Ⅱ 按图示(b) 粘合后即得(c)。

若将上半球面向赤道平面作垂直投影,半球面变为一圆片,其内部的每一点为射影平面上的一个"点",圆片边界圆周上的一对对径点看成一个"点",这就是射影平面的圆片模型。既要粘合各对对径点,又不能使曲面自交,这也只有在 4 维空间中才能做到。下面说明:将圆片模型挖去一个更小的圆片可得 Möbius 带。沿着 AB、CD 切开平环,使之变成两个矩形,再将外圆周的各对对径点

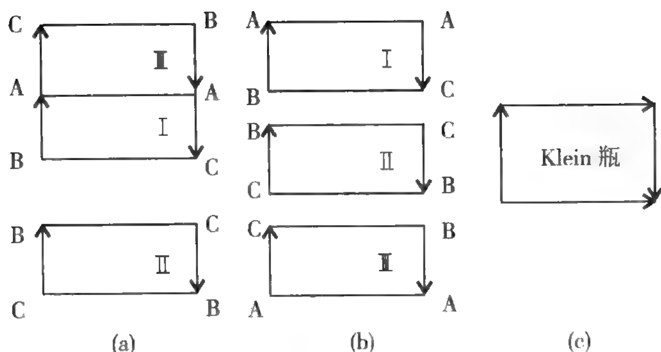


图7

粘合,得一长方形(按图中相同的字母将长方形的两端粘合)为 Möbius 带(图 8)。

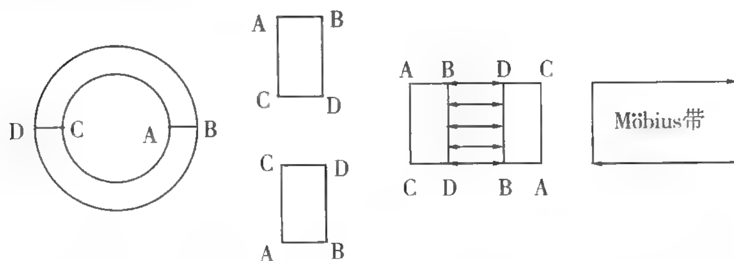


图8

反过来,沿 Möbius 带的边缘粘上一个小圆片,又可得到射影平面 P^2,所以 P^2 也是单侧的。注意,P^2 从整体上看是一个封闭的单侧曲面。但局部上与欧氏平面相同。射影几何中研究的图形均属局部而非整体,因而仍在欧氏平面上作图。

例 2 图 9 为环柄、双环面和 Möbius 带的表示。

例 3 球面挖一个洞同胚于一个圆盘,由前面的讨论知球面

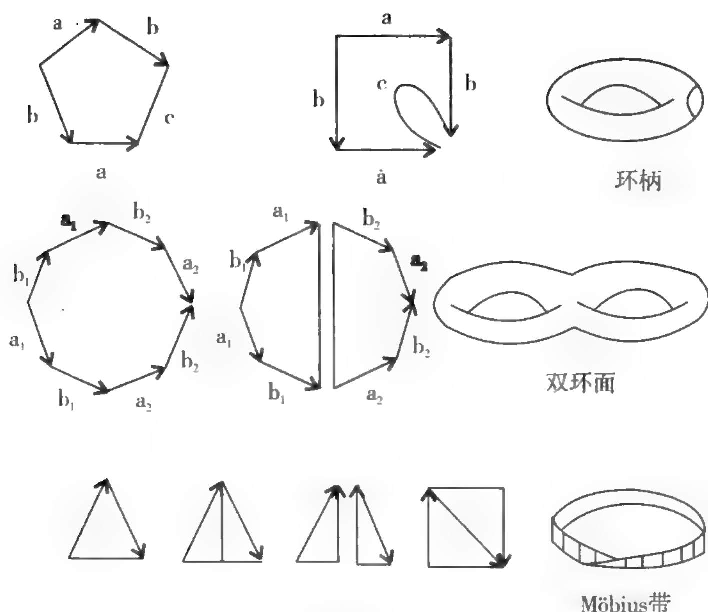
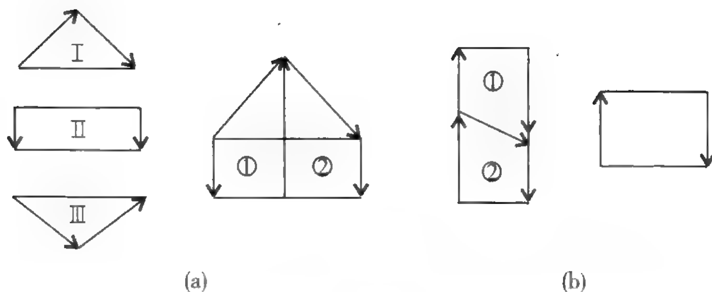


图9

挖一个洞，在洞的边缘粘合一个 Möbius 带得到射影平面。安装两个 Möbius 带的球面则同胚于 Klein 瓶。图 10(a)中Ⅰ、Ⅲ分别是两个 Möbius 带(见上例)，Ⅱ是挖两个洞的球面，先将Ⅰ、Ⅱ粘合起来，结果仍是 Möbius 带，见(b)。再将它和 Möbius 带Ⅲ粘合起来，两个 Möbius 带粘合的曲面同胚于 Klein 瓶。

没有边界的紧致连通曲面称为闭曲面，闭曲面的拓扑分类问题已得到完美的解决。

我们用 P_0 表示球面，P_k 表示安装了 k 个环柄的球面，N_q 表示安装了 q 个 Möbius 带的球面，则曲面 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_k \cdots$ 给出了可定向的闭曲面的完全拓扑分类；曲面 $N_1, N_2, \cdots, N_q, \cdots$ 给出了不可定向的闭曲面的完全拓扑分类。在闭曲面序列 $P_0, P_1, P_2, \cdots,$



(a) (b)

图10

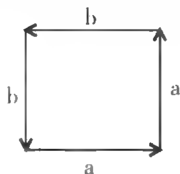
$P_k\cdots,N_1,N_2,\cdots,N_q,\cdots$ 中，任何两个闭曲面是不同胚的。另一方面，若闭曲面是可定向的，则它必同胚于某一 P_k；若不可定向，则它必同胚于某一 N_q。这就是闭曲面的分类定理，它是由上一世纪 Möbius 和 Jordan 得到的。

习 题

1. 将闭区间[0,1]的两个端点 0,1“粘合”起来，证明得到的空间同胚于 S^1。

2. 定义 $f:R^1\to S^1$ 使得对于任意的 $t\in R^1$，$f(t)=(cos2\pi t,sin2\pi t)$。证明 S^1 对于 f 以及 R^1 的通常拓扑而言的商拓扑即 S^1 作为 R^2 的子空间的相对拓扑。

3. 证明下图表示 Klein 瓶。



§7 单纯复合形

为了介绍单纯同调论，引入单纯复合形。

定义 1 $n+1$ 个点 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 当 n 个向量 $\overrightarrow{a_0a_1},\overrightarrow{a_0a_2},\cdots,\overrightarrow{a_0a_n}$ 线性无关时，称这 $n+1$ 个点几何无关。

命题 1 $n+1$ 个点 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 几何无关 $\Leftrightarrow$ 满足两个条件：

(1) $\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i=0$，

(2) $\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_ia_i=0$ 的实数组 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 全为 0。

证明 $\Rightarrow$ 设实数组 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 满足条件(1)，(2)，由(1)：$\lambda_0=-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ 代入(2)，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-a_0)=0$，由于 $\overrightarrow{a_0a_1},\cdots,\overrightarrow{a_0a_n}$ 线性无关，$\therefore\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，由(1)，$\lambda_0=0$。

$\Leftarrow$ 设实数组 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-a_0)=0$，记 $\lambda_0=-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i=0$，并且由(2)，$0=\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_ia_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-a_0)$，且 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，所以 $\overrightarrow{a_0a_1},\cdots,\overrightarrow{a_0a_n}$ 线性无关。

欧氏空间(维数足够高)中，0 维单形为点：a_0；1 维单形为闭线段 a_0a_1；2 维单形为三角形 $a_0a_1a_2$；3 维单形为四面体 $a_0a_1a_2a_3$。一般地，处于几何无关位置的 $n+1$ 个点 $\{a_0,\cdots,a_n\}(n\geqslant 0)$ 的凸包 $\{x\mid x=\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_ia_i,\lambda_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i=1\}$ 称为一个 n 维单纯形，简称单形。

每一单形中包含的比它自己维数低的单形称为该单形的真面。如果单形 σ_1 的顶点都是单形 σ_2 的顶点，则称 σ_1 是 σ_2 的面，记

作 $\sigma_1 < \sigma_2$。例如,3 维单形 $\sigma^3 = < a_0, a_1, a_2, a_3 >$,0 维面有 $< a_0 >$, $< a_1 >$, $< a_2 >$, $< a_3 >$,1 维面有 6 条棱,2 维面有四个面。这些都是真面 。

两个单形规则相处是指要么不相交;如果相交,那么公共部分是它们的公共面的单形。图 1 中(a)、(b)、(c)规则相处,(d)、(e)、(f)不是规则相处。

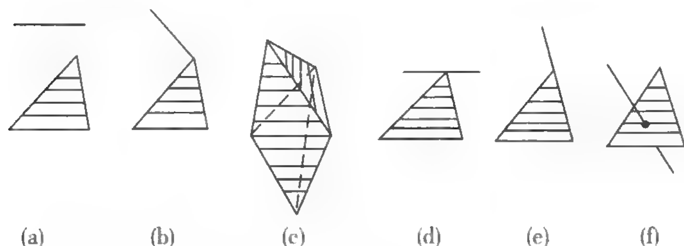


图1

下面用单形构造更复杂的图形——复形。

定义 2 K 是单形的有限集合。如果 K 满足

(1) 若 σ 是 K 的单形,则 σ 的任意面都属于 K;

(2) K 中所有单形都规则相处;

那么称 K 为单纯复形,简称复形。K 中单形维数的最大值为 K 的维数,记作 $dimK = \max\limits_{\sigma \in K}\{\dim \sigma\}$,K 的 0 维单形称为 K 的顶点 。

设 σ^p 是一个 p 维单形,它的所有面的集合称为 σ^p 的闭包复形,记作 $Cl\sigma^p = \{\sigma | \sigma < \sigma^p\}$,它是 p 维复形,σ^p 的所有真面集合称为 σ^p 的边缘复形,记作 $Bd\sigma^p = \{\sigma | \sigma < \sigma^p, \sigma \neq \sigma^p\}$,它是 $p-1$ 维复形。复形 K 的维数不大于自然数 r 的所有单形所成的集合 $K^r = \{\sigma \in K | \dim \sigma \leqslant r\}$ 是 K 的一个 r 维子复形,称为 K 的 r 维骨架。例如,$Bd\sigma^p$ 是 $Cl\sigma^p$ 的 $p-1$ 维骨架。K^0 是 K 的顶点集 。

定义 3 K 中全体单形的所有点组成的集合 $\bigcup\limits_{\sigma \in K}\sigma$ 作为 R^n 的子

空间 X 称为 K 的伴随多面体,简称多面体,记为 $|K| = X$,K 称为 X 的(单纯)剖分。

注意,复形 K 并不是拓扑空间,而只是以单形为元素的集合,而为了定义一类拓扑空间——可剖分空间,我们利用复形这一工具。

定义 4 设 X 是拓扑空间,如果存在复形 K 与同胚 $\varphi: |K| \to X$,则称 X 为可剖分空间,(K,φ) 或 K 称为 X 的一个剖分,记为 $X = (K,\varphi)$。

闭曲面是可剖分的,一般地,维数不大于 3 的流形是可剖分的。以下给出几种常见闭曲面的典型剖分。

例 1 球面 S^2 是可剖分空间(图 2)。

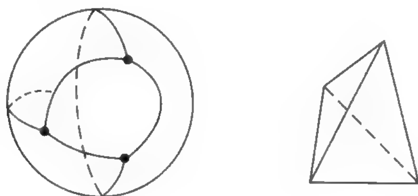


图2

例 2 平环是可剖分空间(按 a_1a_4 剪开得右边的形式,图 3)。

例 3 环面是可剖分空间(图 4)。

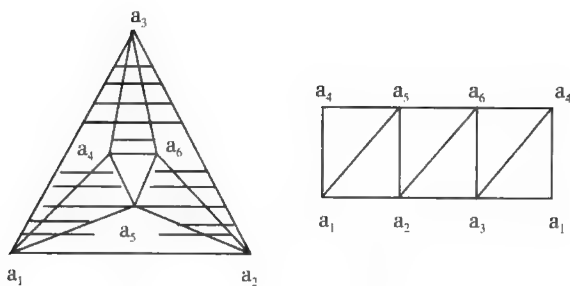
例 4 Möbius 带是可剖分空间(图 5)。

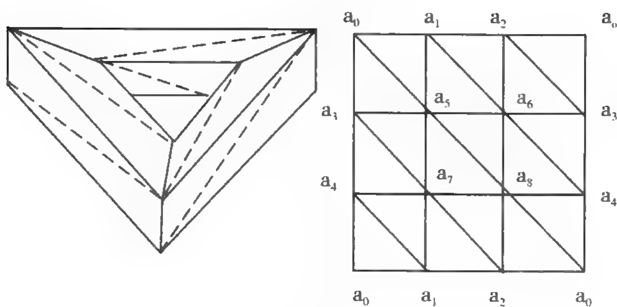
例 5 Klein 瓶是可剖分空间(图 6)。

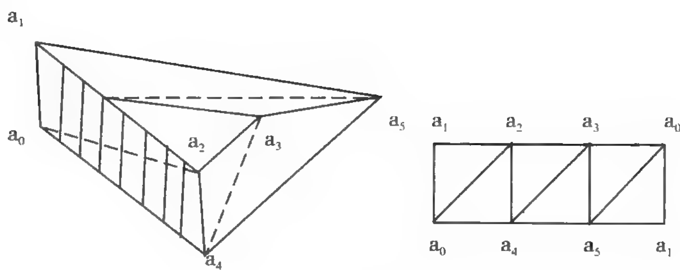
例 6 射影平面 P^2 是可剖分空间(图 7)。

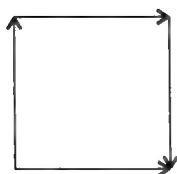
Klein 瓶和射影平面 P^2 相应的图形不能在 R^3 中实现,故以图中右边的展开图来表示它的结论。

可剖分空间必是可度量化的局部道路连通(即 $\forall x \in X$ 及 x 的任一邻域 U_x,存在 x 的道路连通邻域 $V_x \subset U_x$)的紧致空间。


a3
a4
a6
a5
a1
a2
a4 a5 a6 a4
a1 a2 a3 a1
图3


a0 a1 a2 a0
a5 a6
a3 a3
a7 a8
a4 a4
a0 a1 a2 a0
图 4


a1
a0
a2
a3
a5
a4
a1 a2 a3 a0
a0 a4 a5 a1
图5



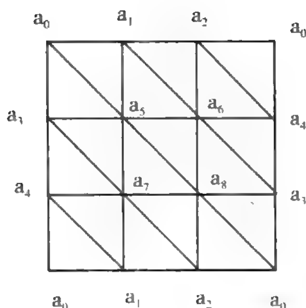


图6



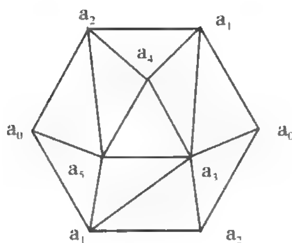


图7

定义　对于 n 维单形 $\sigma^n = < a_0, a_1, \cdots, a_n >$，顶点的排列有 $(n+1)!$ 个，其下标按奇排列和偶排列分成两个等价类，一个等价类称为 σ^n 的一个定向，σ^n 和它的一个定向称为有向单形。有向单形仍记为 σ^n，与它有相反定向的有向单形记为 $-\sigma^n$。

例 7　$\sigma^1 = < a_0, a_1 >$，$-\sigma^1 = < a_1, a_0 >$，$\sigma^2 = < a_0, a_1, a_2 > = < a_1, a_2, a_0 > = < a_2, a_0, a_1 >$，$-\sigma^2 = < a_1, a_0, a_2 > = < a_0, a_2, a_1 > = < a_2, a_1, a_0 >$。

对于复形 K，如果 K 中每个单形都指定了一个定向，则称给了复形以定向。具有指定定向的有向单形称为正定向形。也可将 K 的所有顶点排列成一个次序来自然地确定 K 中各单形的正定向，即由 a_0, a_1, a_2, a_3 导出(图 8)。

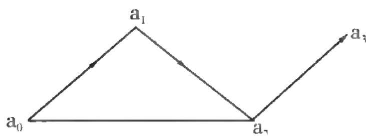


图8

习　题

1. 设$\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$是欧氏空间中几何无关的点组，b是欧氏空间的一点，则$\{b,a_0,a_1,\cdots,a_n\}$几何无关$\Leftrightarrow b$不在$\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$所张成的超平面（由向量组$\{a_1-a_0,\cdots,a_n-a_0\}$所张成的$h$维子空间）上。

2. 设$\sigma=\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle$是$n$维单形，$b$是欧氏空间中一点，使得对$\sigma$的任何两个不同点$x,x'$，线段$bx$和$bx'$只交一点$b$，则$\{b,a_0,a_1,\cdots,a_n\}$几何无关。

§8　单纯复合形的同调群

以环面为例，考虑它的一个选定的剖分K，研究如何判别曲面上的一条定向曲线是否为闭的，进一步是否为一小块曲面的边界。图1中的定向曲线A看作是各定向棱之和，$A=\langle u,v\rangle+\langle v,w\rangle+\langle w,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,u\rangle$。规定$A$的边缘为各定向棱的边缘之和：

$$\partial A=\partial\langle u,v\rangle+\partial\langle v,w\rangle+\partial\langle w,x\rangle+\partial\langle x,y\rangle+\partial\langle y,u\rangle=\langle v\rangle-\langle u\rangle+\langle w\rangle-\langle v\rangle+\langle x\rangle-\langle w\rangle+\langle y\rangle-\langle x\rangle+\langle u\rangle-\langle y\rangle=0$$

再用同样的方法可以计算出定向曲线 B 也是闭的。进一步对图中由三个三角形拼成的一小块曲面 P，其边缘：

$$\partial P = \partial < e,a,b > + \partial < e,b,c > + \partial < e,c,d >$$

$$= < a,b > + < b,e > + < e,a > + < b,c > + < c,e > + < e,b > + < c,d > + < d,e > + < e,c >$$

$$= < a,b > + < b,e > + < e,a > + < b,c > + < c,e > - < b,e > + < c,d > + < d,e > - < c,e >$$

$$= < a,b > + < b,c > + < c,d > + < d,e > + < e,a >$$

$$= B$$

于是 B 是一小块曲面 P 的边缘，这是判别曲线 B 是否为曲面上某一小块曲面边缘的方法。

一般地，K 内定向棱的以整数为系数的一个线性组合：

$$z = \lambda_1 < u_1,v_1 > + \cdots + \lambda_k < u_k,v_k >$$

如果 z 的边缘为零，即

$$\partial z = \partial\lambda_1 < u_1,v_1 > + \cdots + \partial\lambda_k < u_k,v_k > = 0$$

称 z 为 K 的 1 维闭链。

对于 K 的任意两个 1 维闭链 $\sum \lambda_i < u_i,v_i >$ 和 $\sum \mu_i < u_i,v_i >$，定义加法：

$$\sum \lambda_i < u_i,v_i > + \sum \mu_i < u_i,v_i > = \sum (\lambda_i + \mu_i) < u_i,v_i >$$

则 K 的全体 1 维闭链在这个加法下构成一个交换群（*Abel* 群）叫做 K 的 1 维闭链群，记为 $Z_1(K)$。

图 1 中的闭曲线 B 正好是定向三角形的一个整系数线性组合 P 的边缘，称 B 是 1 维边缘（闭）链。K 的全体 1 维边缘链组成 $Z_1(K)$ 的子群——1 维边缘链群，记作 $B_1(K)$。商群 $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$ 叫做 K 的 1 维同调群。

$H_1(K)$ 中的两个元素 z_1 与 z_2 同调，则两个闭链之差是一个边缘链：$z_1 - z_2 = Z \in B_1(K)$（图 2）。

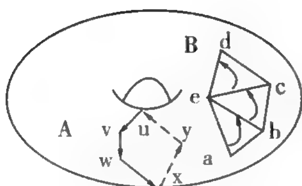


图1

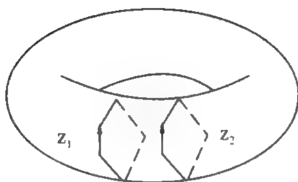


图2

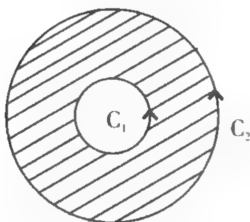


图3

在同伦中，图3的 $C_1 \simeq C_2$。换一个角度，C_1 和 $-C_2$ 共同形成它们所包围的区域的边缘，称它们是同调的道路。基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 解决问题的范围有限，有时需引进高维同伦群 $\pi_n(X, x_0)$，它是以 x_0 为基点的"n 维闭路"的同伦类的集合。然而，即使对比较简单的空间，高维同伦群的计算也是非常困难的。为了寻求另一条联系空间与群的途径，引入了同调群。同调群有着深刻的几何内涵，只是建立同调群的曲折复杂的过程和抽象的代数化的形式掩盖了它的几何背景。

一般地，设复形 K 的维为 n，考察 K 的 p 维单形 $\sigma_1, \cdots, \sigma_\alpha$，其整系数线性组合 $c = n_1\sigma_1 + \cdots + n_\alpha\sigma_\alpha$ 称为 p 维链，链是折线的推广，K 的所有 p 维链记为 $C_p(K)$。对于 $C_p(K)$ 的任意二元：$c_1 =$

$\sum_i n_i\sigma_i, c_2 = \sum_i m_i\sigma_i$,定义其和 $c_1 + c_2$ 为

$$c_1 + c_2 = \sum_i (n_i + m_i)\sigma_i$$

对于任意整数 k,定义 c_1 的 k 倍 kc_1 为

$$kc_1 = \sum_i (kn_i)\sigma_i$$

则 $C_p(K)$ 是(有限生成的)交换群。$C_p(K)$ 称为复形 K 的(整系数)p 维链群

$$C_p(K) \equiv Z\sigma_1 + \cdots + Z\sigma_a$$

我们定义从 $C_p(K)$ 到 $C_{p-1}(K)(p \geqslant 1)$ 的同态 ∂_p 如下:

对 0 单形 σ^0,定义 $\partial_0\sigma^0 = 0$。对有向单形 $\sigma^1 = a_0a_1$,定义 $\partial_1\sigma^1 = a_1 - a_0$。对有向单形 $\sigma^2 = a_0a_1a_2$,定义 $\partial_2\sigma^2 = a_1a_2 - a_0a_2 + a_0a_1$(图 4),一般地,对有向 p 维单形 $\sigma^p = a_0a_1\cdots a_p$,定义

$$\partial_p\sigma^p = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i a_0a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_p,$$

即

$$\partial_p\sigma^p = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i a_0a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_p。$$

对于 p 维链 $c = n_1\sigma_1 + \cdots + n_a\sigma_a$,定义 $\partial_pc = n_1\partial\sigma_1 + \cdots + n_a\partial_p\sigma_a = \sum_i n_i\partial_p\sigma_i$。于是 $\partial_p: C_p(K) \to C_{p-1}(K)(p \geqslant 1)$,$\partial_0: C_0(K) \to 0$ 是同态,且得到同态序列:

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

对于 p 维链 c,$p-1$ 维链 ∂_pc 称为 c 的边缘链。

定理 1 $\partial_{p-1}\partial_p = 0$(或简记为合成同态 $\partial\partial = \partial^2 = 0$)。

证明 只须证 p 维单形 σ^p 满足定理即可。记 $\sigma^p = a_0a_1\cdots a_p$,则

$\partial_{p-1} \circ \partial_p\sigma^p$

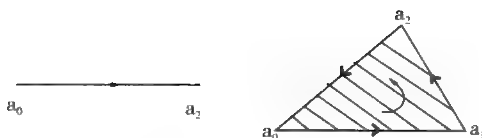


图4

$$= \partial_{p-1}(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_p)$$

$$= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \partial_{p-1}(a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_p)$$

$$= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i (\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j a_0 \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{a}_i \cdots a_p + \sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{j-1} a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_p)$$

$$= \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant p}(-1)^{i+j} a_0 \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{a}_i \cdots a_p - \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant p}(-1)^{i+j} a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_p$$

$$= 0。$$

例 1 对 1 维单形 σ^1，$\partial\sigma^1$ 是 0 链，所以 $\partial^2\sigma^1 = \partial(\partial\sigma^1) = 0$。对 2 维单形 $\sigma^2 = a_0 a_1 a_2$，$\partial^2\sigma^2 = \partial(\partial\sigma^2) = \partial(a_1 a_2 - a_0 a_2 + a_0 a_1) = a_2 - a_1 - (a_2 - a_0) + a_1 - a_0 = 0$。对 3 维单形 $\sigma^3 = a_0 a_1 a_2 a_3$，$\partial^2\sigma^3 = \partial(\partial\sigma^3) = \partial(a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_3 - a_0 a_1 a_2) = (a_2 a_3 - a_1 a_3 + a_1 a_2) - (a_2 a_3 - a_0 a_3 + a_0 a_2) + (a_1 a_3 - a_0 a_3 + a_0 a_1) - (a_1 a_2 - a_0 a_2 + a_0 a_1) = 0$。

注意，最后的 12 项中，有 6 项符号为 $(-1)^{j-1}$ 且 $\partial^2 = 0$ 的几何意义是任意面片的边缘为闭折线 。

当复形 K 的 p 维链 c^p，满足 $\partial_p c^p = 0$ 时，则 c^p 称为 p 维闭链，p 维闭链的全体是 $C_p(K)$ 的一个子群，叫作 K 的 p 维闭链群，记为 $Z_p(K)$。事实上，$Z_p(K)$ 是同态 $\partial: C_p(K) \to C_{p-1}(K)$ 的核，故

$Z_p(K)$ 是 $C_p(K)$ 的子群——p 维闭链群，且 $Z_0(K) = C_0(K)$。

对于 p 维链 c^p，如果存在 $p+1$ 维链 c^{p+1}，满足 $\partial c^{p+1} = c^p$，则 c^p 叫做p 维边缘链。由 $\partial c^p = \partial(\partial c^{p+1}) = \partial^2 c^{p+1} = 0$，知边缘链 c^p 是闭链。p 维边缘链的全体记为 $B_p(K)$，且 $B_p(K) = \partial C_{p+1}(K)$，为 $C_{p+1}(K)$ 在 ∂_{p+1} 下的像，它是 $Z_p(K)$ 的子群，叫做 p 维边缘链群。

商群 $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ 叫做复形 K 的整系数p 维同调群，因为 $C_p(K)$ 是有限生成的，所以 $H_p(K)$ 也是有限生成的交换群。

若对于两个 p 维链z_1, z_2，存在 $p+1$ 维链 c 使$z_1 - z_2 = \partial_{p+1}c$ 时，称 z_1 与 z_2 同调：$z_1 \sim z_2$。对于 p 维闭链z，有 $z = \partial_{p+1}c$（c 为$p+1$ 维链），称 z 同调于0：$z \sim 0$。将 p 维闭链群 $Z_p(K)$ 按等价关系 $\sim$ 分类而得到的等价类（同调类）的全体形成同调群 $H_p(K)$，链 c 所在的同调类记为$[c]$。

例 2　计算 $K = \{a\}$ 的同调群 $H_p(K)$。

当 $p = 0$ 时，$C_p(K) = Za = \{za \mid z \in Z\}$，当 $p \neq 0$ 时，我们将链群的概念推广到所有整数，即当 $p < 0$或 $p > \dim K$时，令 $C_p(K) = 0$，于是，$C_p(K) = 0$。因此，对所有的 p，$B_p(K) = 0$，从而 $p > 0$ 时，$H_0(K) = Z_0(K) = Za \cong Z$。当 $p \neq 0$ 时，$H_p(K) = 0$。

例 3　$\sigma^2 = a_0a_1a_2$，计算 $K = Bd\sigma^2$ 的同调群。

当 $p \neq 0,1$ 时，$H_p(K) = 0$，对于 $p = 1$，$C_1(K) = Z < a_0, a_1 > \oplus Z < a_1, a_2 > \oplus Z < a_2, a_0 >$（$< a_0, a_1 >$ 表示由顶点排列 a_0, a_1 决定的有向单形）。令 $Z_0 = < a_0, a_1 > + < a_1, a_2 > + < a_2, a_0 >$ 则 $\partial nz_0 = 0$，即 $nz_0 \in Z_1(k)$。另一方面，设 $z = n_0 < a_1, a_2 > + n_1 < a_2, a_0 > + n_2 < a_0, a_1 > \in Z_1(k)$。由 $\partial z = (n_1 - n_2)a_0 + (n_2 - n_0)a_1 + (n_0 - n_1)a_2 = 0$，得 $n_0 = n_1 = n_2$，因此，$Z_1(K) = Zz_0 \cong Z$。由 $B_1(K) = 0$，得到 $H_1(K) = Z_1(K) \cong Z$。

对于 $p = 0$，$C_0(K) = Za_0 \oplus Za_1 \oplus Za_2 = \{(n_0a_0, n_1a_1, n_2a_2) \mid n_i$

$\in Z, i = 0,1,2\} = Z_0(K)$。由于$\partial < a_0, a_1 > = a_1 - a_0 : a_0 \sim a_1$；$\partial < a_1, a_2 > = a_2 - a_1 : a_1 \sim a_2$。于是$a_0 \sim a_1 \sim a_2$，即同调类$[a_0] = [a_1] = [a_2]$。这样$H_0(K) = Z[a_0]$，是循环群。下面确定$H_0(K)$的阶数。设$na_0 \sim 0$，则存在$c = n_0 < a_1, a_2 > + n_1 < a_2, a_0 > + n_2 < a_0, a_1 >$使得$na_0 = \partial c = (n_1 - n_2)a_0 + (n_2 - n_0)a_1 + (n_0 - n_1)a_2$，从而$n_0 = n_1 = n_2, n = 0$。即$H_0(K)$是无限循环群，$H_0(K) \cong Z$。

一般地，当$p = \dim K$时，$C_{p+1}(K) = 0$，所以$B_p(K) = 0$，于是$H_p(K) = Z_p(K)$，它是自由交换群。

复形K如果不能分解为两个非空不相交子复形的并，就称K是连通的，否则K不连通。K的一连通子复形L称为K的一个连通分支，如果$K - L$也是子复形，显然，K的连通分支就是其极大连通子复形，每个复形总可以分解为有限个连通分支的并集。当然，复形只是一个有组合结构的集合，这里所说的连通和连通分支与拓扑空间的连通和连通分支是不同的概念。

设复形K不连通，$K = K_1 \cup K_2$，K_1和K_2是不相交的子复形。显然$C_p(K) = C_p(K_1) \oplus C_p(K_2)$（$p$为整数），并且同态$\partial p : C_p(K_i) \to C_{p-1}(K_i)$，$i = 1,2$，于是$Z_p(K) = Z_p(K_1) \oplus Z_p(K_2)$，$B_p(K) = B_p(K_1) \oplus B_p(K_2)$，从而$H_p(K) = H_p(K_1) \oplus H_p(K_2)$（设$z = c_1 + c_2, c_i \in C_p(K_i), i = 1,2$。$\partial_p z = \partial_p c_1 + \partial_p c_2 = 0$，但$\partial_p c_i \in C_{p-1}(K_i)$由$C_{p-1}K = C_{p-1}(K_1) \oplus C_{p-1}(K_2)$得$\partial_p c_i = 0$，$Z_p(K) = Z_p(K_1) \oplus Z_p(K_2)$。类似地考虑$B_p(K) = B_p(K_1) \oplus B_p(K_2)$）。

定理 2 （直和分解定理）设复形K的连通分支为$K_1, \cdots, K_r$，则

$$H_p(K) \cong H_p(K_1) \oplus \cdots \oplus H_p(K_r) = \bigoplus_{i=1}^{r} H_p(K_i), p \in Z。$$

定理 3 复形的零维同调群$H_0(K)$的秩等于K的连通分支个

数,若 K 有 r 个分支,则 $H_0(K) \cong \underbrace{Z \oplus \cdots \oplus Z}_{r个}$。

证明 根据直和分解定理,只须证明连通复形的零维同调群是自由循环群。取定 $a_1 \in K^0$(K 的顶点集),$\forall a_i \in K^0$,由 K 的连通性存在链 $c_i \in C_1(K)$,使得 $\partial c_i = a_i - a_1$,$\therefore a_1 \sim a_i$。因此 $[a_i] = [a_1]$。于是对任意的 $z = \sum n_i a_i \in Z_0(K)$,$[z] = (\sum n_i)[a_1]$,即 $H_0(K) = Z[a_1]$ 为循环群。下面确定 $H_0(K)$ 的阶数为无限。即若令 $n[a_1] = 0$,则 $n = 0$。事实上,存在 $c \in C_1(K)$ 使得 $na_1 = \partial c$。但对任意 1 维单形 $a_i a_j$,$\partial a_i a_j = a_j - a_i$,它在 a_i 和 a_j 上系数之和 $(-1) + 1 = 0$,一般地,当将 ∂c 表示成 $\partial c = \sum n_i a_i$ 时,必有 $\sum_{i=1}^{r} n_i = 0$。比较 $na_1 = \sum n_i a_i = n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_r a_r$,可得 $n = n_1$,$n_2 = \cdots = n_r = 0$。因此 $n = n_1 = -\sum_{i=2}^{r} n_i = 0$,所以 $H_0(K)$ 为无限循环群,$H_0(K) \cong Z$。

例 4 $K = \sigma^2 = a_0 a_1 a_2$(图 5),求 $H_0(K)$,$H_1(K)$,$H_2(K)$。

解 由上述定理,$H_0(K) = Z$。K 的任意 1 维闭链 $c = n(a_1 a_2 + a_2 a_0 + a_0 a_1)$,$n \in Z$。而 $\partial \sigma^2 = a_1 a_2 + a_2 a_0 + a_0 a_1$ $\therefore c = \partial(n\sigma^2)$ 即 $c \sim 0$,$\therefore H_1(K) = 0$。K 的任意 2 维闭链 $c = n\sigma^2$,$n \in Z$,由于 $\partial c \sim 0$,$\therefore 0 = \partial c = n\partial\sigma^2 = n(a_1 a_2 + a_2 a_0 + a_0 a_1)$ $\therefore n = 0$,即任意 2 维闭链 c 为 0,$\therefore H_2(K) = 0$。

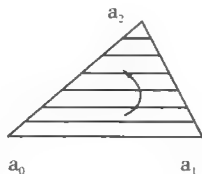


图5

如果 K 是 1 维连通复形,则 $H_1(K) = Z_1(K)$,它的秩就是 $|K|$ 上的“洞”的个数。例如对 $\sigma^2 = a_0 a_1 a_2$,$K = Bd\sigma^2$,$H_1(K) = Z_1(K) \cong Z$,秩为 1。说明 $Bd\sigma^2$ 有一个“洞”。但对 $K = \sigma^2$,则 $H_1(K) = 0$。对于一般连通复形 K,$H_1(K)$ 的秩为 $|K^1|$ 上

"洞"的个数,即 $Z_1(K)$ 的秩就是 $|K^1|$ 上"洞"的个数。

下面再计算几个复形的同调群。

例 5 K 为平环,其三角形剖分如图 6,$\dim K = 2$。$p < 0$ 或 $p > 2$ 时,$H_p(K) = 0$。对于 $p = 0$,K 连通,$H_0(K) \cong Z$。对于 $p = 2$,$z \in Z_2(K)$,不妨设 $z = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots$ 由于和 σ_1 有公共边 a_2a_5 的只有 σ_2,由 $\partial z = n_1(a_1a_2 + a_2a_5 + a_5a_1) + n_2(a_5a_2 + a_2a_6 + a_6a_5) + \cdots = 0$ 得 $n_1 = n_2$,从而 $z = n_1\sigma_1 + n_1\sigma_2 + \cdots$。类似考察其余 σ_i,可知 $z = n_1(\sigma_1 + \cdots\sigma_6)$,但 $\partial(\sigma_1 + \cdots\sigma_6) \neq 0$,$\therefore n_1 = 0$ 即 $Z_2(K) = 0$,$\therefore H_2(K) = 0$。计算 $H_1(K)$,设 $c \in C_1(K)$。若 c 在 a_1a_2 上取值为 k,则 $c - \partial k\sigma_1$ 在 a_1a_2 上取值为 0,它同调于 c($\because c - (c - \partial k\sigma_1) = \partial k\sigma_1$)我们称用 σ_1 消去 c 中的 a_1a_2(或挤到边上去的方法)。类似地,还可用 σ_2、σ_3、σ_4、σ_5 和 σ_6 分别消去 a_5a_6、a_2a_3、a_4a_6、a_5a_1 和 a_4a_5,于是 c 同调于链 $c^1 = n_1a_1a_5 + n_2a_5a_2 + n_3a_2a_6 + n_4a_6a_3 + n_5a_3a_4 + n_6a_4a_1$,如果 $c \in Z_1(K)$,则 $c^1 \in Z_1(K)$,因此 $0 = \partial c^1 = (n_6 - n_1)a_1 + (n_2 - n_3)a_2 + (n_4 - n_5)a_3 + (n_5 - n_6)a_4 + (n_1 - n_2)a_5 + (n_3 - n_4)a_6$,从而 $n_1 = n_2 = \cdots = n_6$。记 $z = a_1a_5 + a_5a_2 + a_2a_6 + a_6a_3 + a_3a_4 + a_4a_1$,则 $c^1 = n_1z$,$<c> = n_1<z>$。这说明 $H_1(K)$ 是由 $<z>$ 生成的循环群。下面证明 $<z>$ 的阶为无限群;即当 $m<z> = 0$ 时,必有 $m = 0$。事实上,若 $m<z> = 0$,则有 $c = \sum_{i=1}^{6} n_i\sigma_i \in C_2(K)$,设 $\partial_2 c = mz$,$\partial_2 c$ 和 mz 在 a_1a_2 的值分别为 n_1 和 0,因此 $n_1 = 0$。同理,$n_2 = \cdots = n_6$

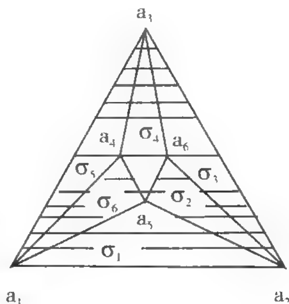


图6

$= 0, \therefore c = 0$,从而 $m = 0, \therefore H_1(K) \cong Z$ 。

注:本例中还可用挤到边上去的方法,证明 K 的任意一维闭链 c 同调于另一典型的代表闭链 $z^1 = a_4a_5 + a_5a_6 + a_6a_4$,即 $< c > = n < z^1 >$,此外,二个多面体的不同剖分有同构的同调群是由同调群的拓扑不变性来保证的。最后,平环中的任一有向闭曲线必与取 n 次的有向内圆周共同作成平环上的一有向区域的边缘,平环的这个几何性质在数学分析和复变函数论中是常用的 。

例 6 K 是环面的一个剖分(图 7),取定 2 维单形的定向,并记作 $\sigma_i(i = 1,\cdots,18)$,$H_0(K) \cong Z$,$H_p(K) = 0(p \neq 0,1,2$时)。下面计算 $H_2(K)$:记 $z_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$,$z'_1 = a_1a_4 + a_4a_7 + a_7a_1$,则 z_1 和 z'_1 均为 1 维闭链,记 $z_2 = \sum_{i=1}^{18}\sigma_i$,则不难验证:$z_2 \in Z_2(K)$。考察 a_5a_1,它是 σ_1 的顺向面,而 a_1a_5 是 σ_2 的顺向面,于是若 $c \in C_2(K)$,则 $\partial_2 c$ 在 a_1a_5 上取值为 0,等价于 c 在 σ_1 与 σ_2 上取值相同,于是 $c \in Z_2(K)$ 等价于 c 在每个 σ_i 上取同样的系数 n:$c = nz_2$,因此 $H_2(K) = Z_2(K) \cong Z$ 。

设 $c \in C_1(K)$,可以用 σ_{14} 消去 a_7a_2,用 σ_7 消去 $a_7a_8,\cdots$,从而 $c \sim c^1 = n_1a_1a_2 + n_2a_2a_3 + n_3a_3a_1 + n_4a_1a_4 + n_5a_4a_7 + n_6a_7a_1 + n_7a_2a_5 + n_8a_5a_8 + n_9a_3a_6 + n_{10}a_6a_9$(图 8)。当 c 为闭链,$\partial c^1 = 0$,可推出 $n_7 = n_8 = n_9 = n_{10} = 0$,而 $n_1 = n_2 = n_3$ 和 $n_4 = n_5 = n_6$,即 $c^1 = n_1z_1 + n_4z'_1$,即 $< c > = n_1 < z_1 > + n_4 < z'_1 >$,因此,由 $< z_1 >$ 和 $< z'_1 >$ 生成 $H_1(K)$。下面确定 z_1 和 z'_1 的阶均为无限阶。若 $n < z_1 > + m < z'_1 > = 0$,则 $nz_1 + mz'_1 \in B_1(K)$,从而有 $c \in C_2(K)$,使 $\partial_2 c = nz_1 + mz'_1$,由于 $nz_1 + mz'_1$,在 K 内部的(除 z_2 外)1 维定向单形上取值为 0,可推出 $c = kz_2$,从而 $\partial_2 c = 0$,得到 $n = m = 0, \therefore H_1(K) \cong Z \oplus Z$,这反映出环面 T 有两个“洞”,即闭曲线 α 和 β 所反映的环面两个不同的洞(图 9)。图中 α

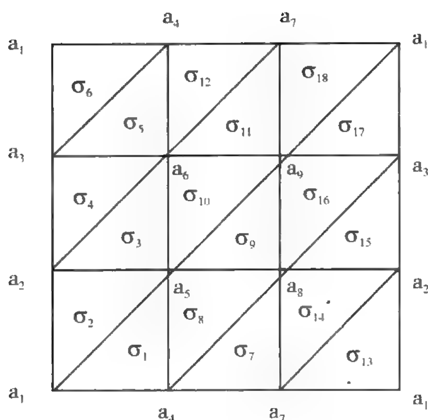


图7

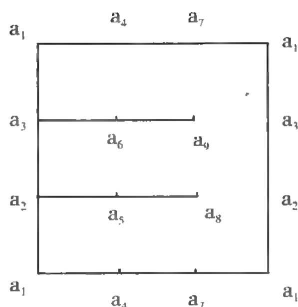


图8

和 γ 反映同一个洞，这是 $\alpha \sim \gamma$ 的缘故，换言之，同调等价类 $<\alpha>$ 刻画了环面 T 的"洞"的性质。而 δ 自身是环面 T 上一块曲面片的边缘，δ 并不刻画任何洞 。

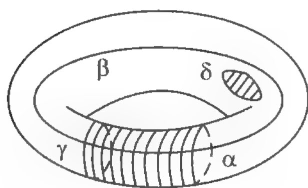


图9

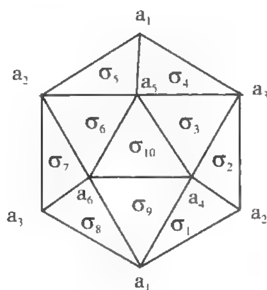


图10

例 7 K 是射影平面的剖分(图 10),$H_0(K)\cong Z$,$H_p(K)=0$,当 $p\neq 0,1,2$ 时,下面先计算 $H_2(K)$,令 $z_1=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$,把外边界的棱叫做边缘棱,其余的叫做中间棱。考虑一个 2 维闭链 c,因为 ∂c 中不出现中间棱,所以 $c=nc_2$,这里 $c_2=\sum_{i=1}^{10}\sigma_i$,而 $0=\partial c=\partial nc_2=2nz$,$\therefore n=0$。这样 $H_2(K)=Z_2(K)=0$。现在计算 $H_1(K)$,用诸 σ_i 消去中间棱,可知对 K 的 1 维闭链 $z\sim nz_1$,即 $H_1(K)$ 是由 $<z_1>$ 生成的循环群。下面证明 z_1 的阶数为 2,即 $nz_1\sim 0$,必有 n' 使 $n=2n'$。事实上,$nz_1\sim 0$,则有二维闭链 c,使 $\partial c=nz_1$,由于 ∂c 不含中间棱,$\therefore c=n'c_2$,故有 $nz_1=\partial n'c_2=n'\partial c_2=2n'z_1$,即 $n=2n'$,$\therefore H_1(K)$ 是 2 阶循环群,记作:$H_1(K)\cong Z_2$。综上所述:

$$H_p(K)=\begin{cases}Z & p=0\\ Z_2 & p=1\\ 0 & p\neq 0,1\end{cases},$$

由此例可构造 2 维复形 K:

$$H_p(K)=\begin{cases}Z & p=0\\ Z_q & p=1\\ 0 & p\neq 0,1\end{cases},$$

其中 Z_q 为 q 阶循环群。

例 8 设 σ^n 是 n 维单形,$n>1$,K 为闭包复形 $Cl\sigma^n$,$\dim K=n$,则

$$H_p(K)=\begin{cases}0 & p<0\text{ 或 }p>0\\ Z & p=0\end{cases}$$

对于 $0<p<n$,取定 $a_0\in K^0$(K 的顶点集或 K 的 0 维骨架),对任意的 $z\in Z_p(K)$,存在 $z'\in Z_p(K)$,使得 z' 中出现的有向单形都以 a_0 为一个顶点,且 $z\sim z'$(用挤到边上的方法即可)。设 $z'=$

$n(a_0\cdots a_p)+\cdots$，由 $0=\partial z'=n(a_1\cdots a_p)+\cdots$，且注意到省略项中不再出现 $a_1\cdots a_p$，可知 $n=0$，$\therefore z\sim 0$，$Z_p(K)=B_p(K)$，$H_p(K)=0$。对于 $p=n$，$C_n(K)=Z\sigma^n=\{z\sigma^n|z\in Z\}$，$\partial\sigma^n\neq 0$，$\therefore Z_n(K)=0$，$H_n(K)=0$。

例 9　设 σ^n 是 n 维单形，$n>1$，L 为边缘复形 $Bd\sigma^n$，$\dim L=n-1$，先计算 $H_{n-1}(L)$。对 L 的任一 $n-1$ 维闭链 z，它也是闭包复形 $K=Cl\sigma^n$ 的 $n-1$ 维闭链，由上例，$Z_{n-1}(K)=B_{n-1}(K)$，因此存在 $c=m\sigma^n\in C_n(K)$，使得 z 为 c 的边缘链：$z=\partial c=m\partial\sigma^n$，$z_0=\partial\sigma^n$ 是 K 的一条 $n-1$ 维闭链，也是 L 的 $n-1$ 维闭链，从而有 $Z_{n-1}(L)=Zz_0=\{mz_0|m\in Z\}$。对于 $n-1$ 维复形 L，$\because C_n(L)=0$，$\therefore B_{n-1}=0$，即有 $H_{n-1}(L)\cong Z$。

L 为 K 的 $n-1$ 维骨架 K^{n-1}，$\therefore$ 对 $p<n-1$，有 $H_p(L)\cong H_p(K)$。这样，有

$$H_p(K)\cong\begin{cases}Z & p=0,n-1\\0 & p\neq 0,n-1\end{cases}$$

由于 $|Cl\sigma^n|\cong D^n$，$|Bd\sigma^n|\cong S^{n-1}$，从本例可得圆盘和球面的同调群，例如

$$H_p(D^2)=\begin{cases}Z & p=0\\0 & p=1,2\end{cases}\qquad H_p(S^2)=\begin{cases}Z & p=0,2\\0 & p=1\end{cases}$$

例 10　K 为 Möbius 带的剖分（图 11），显然 $H_2(K)=0$，$H_0(K)\cong Z$。下面计算 $H_1(K)$。

设 $c_2=\sum_{i=1}^{6}\sigma_i$，$c_1'=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4$，$c_1''=a_1a_6+a_6a_5+a_5a_4$，$z_1'=c_1'+a_4a_1$，$z_1''=c_1''+a_4a_1$ 显然，c_2 不是闭链，也非整数模 $p(\geqslant 2)$ 闭链，而 z_1'、z_1''、$c_1'+c_1''$ 为整数闭链。 $\partial c_2=z_1'+z_1''\therefore z_1'\sim -z_1''$。设 $z_1\in Z_1(K)$，$\partial z_1=0$。用挤到边上去的方法（例如用 $a_5a_1+a_1a_4$ 替换 a_5a_4），从 z_1 得到链 z_2，它不含顶边上的棱，且 z_2

$\sim z_1$。同样，从 z_2 得到链 z_3，它不含对角棱，即 z_3 只含底边上的棱和竖棱，且 $z_3 \sim z_1$。由于 z_3 是闭链：$\partial z_3 = 0$，顶点 a_2 不能在 ∂z_3 中出现。而除 a_2a_5 外，z_3 不含有别的以 a_2 为顶点的棱，所以竖棱 a_2a_5 不在 z_3 中出现。同理，竖棱 a_3a_6 也不在 z_3 中出现。由于 z_3 是闭链，如果 z_3 含有一条底棱 n 次，它就必含有 nz_1'，而且 $z_3 - nz_1'$ 不可能含有右边竖棱 a_4a_1，$\therefore z_3 = nz_1'$。至此，证明了 $z_1 \sim nz_1'$。最后，证明 $nz_1' \sim 0$，则 $n = 0$。事实上，设 $nz_1' = \partial c$（c 为一个二维链），由于底边棱恰是一个 σ_i 的顺向面（$i = 2,4,6$），故 $\sigma_i(i = 2,4,6)$ 在 c 中必出现 n 次。σ_5 与 σ_6 相邻，∂c 不出现 a_1a_3，所以 σ_5 也必出现 n 次。同样，σ_1、σ_3 也出现 n 次，$c = nc_2$。由 $nz_1' = \partial c = \partial(nc_2) = nz_1' + nz_1''$ 知 $n = 0$，$\therefore H_1(K) \cong Z$。

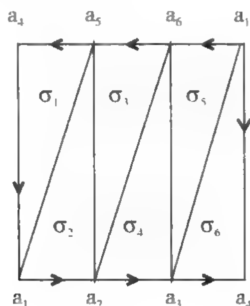


图11

现将一些常见图形的同调群列表如下。注意，对于连通复形 K，$H_1(K)$ 的秩 m 即为 $|K^1|$ 上一维洞的数目，例如对有两个洞的环面，$H_1(K)$ 的秩为 2。

图形	$H_0(K)$	$H_1(K)$	$H_2(K)$	备注
平环	Z	Z	0	
环面	Z	$Z \oplus Z$	Z	
射影平面	Z	Z_2	0	
Möbius 带	Z	Z	0	
圆盘 D^2	Z	0	0	
圆盘 D^n	Z	0	0	$H_p(K) = 0, p \neq 0$
球面 S^2	Z	0	Z	
球面 S^n	Z	0	0	$H_n(K) = Z$
Klein 瓶*	Z	$Z \oplus Z_2$	0	

一般地，复形 K 的 p 维同调群有如下唯一的标准分解式：$H_p(K) \cong Z \oplus \cdots \oplus Z \oplus Z_{\theta_1^p} \oplus \cdots \oplus Z_{\theta_{\tau_p}^p}$ 其中 $H_p(K)$ 的秩 $\beta_p \geqslant 0$，称为 K 的 p 维 Betti 数，β_p 反映了 $|K|$ 中独立的 p 维"洞"的个数。当 $\tau_p \geqslant 0$ 时，$\theta_i^p > 1$，且 θ_i^p 整除 θ_{i+1}^p，$\{\theta_i^p \mid i = 1, \cdots, \tau_p\}$ 称为 K 的 p 维挠系数。

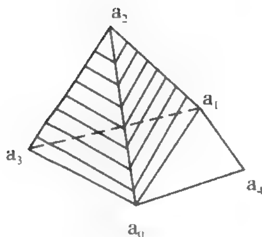
习　题

1.σ 为一维单形，计算 $H_p(\sigma)$。

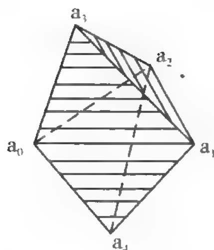
2.σ 为一维单形，$K = Bd\sigma$，计算 $H_p(K)$。

3. 如图，$K = Bd(a_0, a_1, a_2, a_3) \cup Bd(a_0, a_1, a_4)$，计算 $H_p(K)$。

4. 如图，$K = Bd(a_0, a_1, a_2, a_3) \cup Bd(a_0, a_1, a_2, a_4)$，计算 $H_p(K)$。



(第3题)



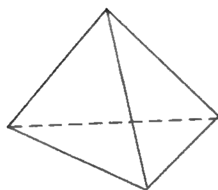
(第4题)

§9 Euler — Poincaré 公式

对凸多面体,有著名的欧拉公式: $V - E + F = 2$,因此,由欧拉公式知仅有五种正多面体。事实上,以 m 记每个顶点处的棱数,n 记每个面的边数($m,n \geqslant 3$),考虑到每条棱重复计算,有 $mV = 2E = nF$,且 $V - E + F = 2$,于是$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$,因此不可能同时有 $m > 3, n > 3$,若 $n = 3$,则$\frac{1}{m} = \frac{1}{E} + \frac{1}{6}$,$m = 3,4,5$。对称地,$m = 3$,$n = 3,4,5$,即相对应于正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体(图 1)。

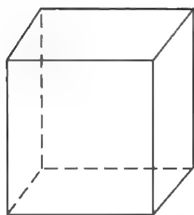
凸多面体的欧拉公式的推广是复形 K 的欧拉示性数,这一推广至今仍是代数拓扑学的中心内容之一。设 K 有 α_q 个 q 维单形,$q = 0,1,\cdots,\dim K$,称整数 $\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K}(-1)^q\alpha_q$ 为复形 K 的 Euler示性数,它是拓扑不变量 。

对于凸多面体, 每个面可用一些互不交叉的对角线分割为三角形,从而使其表面有一个三角形剖分 K,其 $q(q = 0,1,2)$ 维单形数为 α_q,则 $\alpha_0 = V$,而每增加一条对角线就增加了一个面,所以



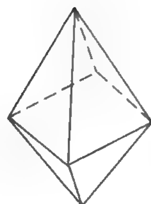
正四面体

(m=n=3)



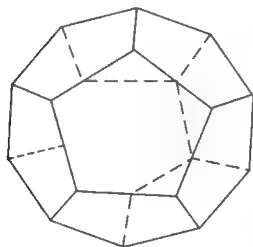
正六面体

(m=3,n=4)



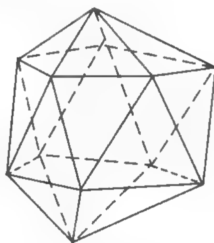
正八面体

(m=4,n=3)



正十二面体

(m=3,n=5)



正二十面体

(m=5,n=3)

图1

$\alpha_1 - E = \alpha_2 - F$，即 $F - E = \alpha_2 - \alpha_1$，于是 $\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = V + F - E$。有洞的紧致曲面的洞数称为亏格，用 g 表示，环面的亏格为1，双环面的亏格为2(图2)。我们认为亏格为 g 的紧致曲面 M 是带了 g 个环柄紧致曲面，其欧拉示性数 $\chi(M) = 2(1-g)$。

事实上，切开紧致曲面M的每一个环柄，把切口用面盖上，需要两个面，因此，将环柄全部切掉后，一共要盖上 $2g$ 个面。动过以上手术的曲面 M' 同胚于球面 S，由于欧拉示性数为拓扑不变量，所以，$\chi(M') = \chi(S) = 2$(可通过三角剖分直接计算)，但 M' 比 M

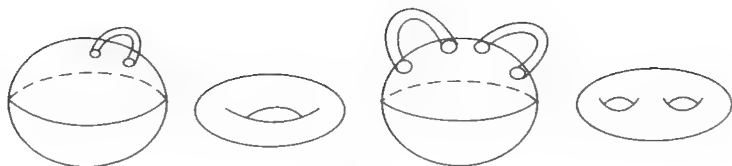


图2

多了 $2g$ 个面,因此 $\chi(M') = \chi(M) + 2g = 2$,即 $\chi(M) = 2 - 2g = 2(1 - g)$。当紧致(定向)曲面的洞数为0,1,2… 时,其欧拉示性数分别为 2,0, -2, -4,… 。

类似地,安装了 h 个 Möbius 带的球面的欧拉示性数为 $2 - h$(h 也称亏格)。对 P^2,$\chi(P^2) = 2 - 1 = 1$,而 Klein 瓶的欧拉示性数为$2 - 2 = 0$。

注:设 M 是R^3 中定向闭曲面,则$\int_M KdA = 2\pi\chi(M)$,这个公式把整体的拓扑不变量 $\chi(M)$ 和局部的等距不变量 K 联系起来了,这个公式在高维下的推广是现代微分几何发展的一个原动力。

定义 $H_q(K)$ 是有限生成交换,记它的秩为 β_q,称为复形 K 的 q 维Betti 数。

定理 (Euler—Poicaré 定理)设 K 是 n 维复形,β_q 是 K 的 q 维 Betti 数,$q = 0,1,\cdots,n$。则有 Euler—Poicaré 公式

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\beta_q$$

证明 分别记 $\lambda_q =$ 秩 $Z_q(K)$,$\mu_q =$ 秩 $B_q(K)$。由 $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ 和秩的可加性,得 $\beta_q = \lambda_q - \mu_q, 0 \leqslant q \leqslant n$。

又因为 $B_{q-1}(K)$ 和 $Z_q(K)$ 分别是$\partial q: C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ 的像与核,所以有 $B_{q-1}(K) \cong C_q(K)/Z_q(K)$,于是

$$\mu_{q-1} = \alpha_q - \lambda_q, 0 \leqslant q \leqslant n。$$

两式相加：令 $\mu_{-1}=0$，得

$$\alpha_q-\beta_q=\mu_q+\mu_{q-1}, 0\leqslant q\leqslant n。$$

于是 $\chi(K)-\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\beta_q=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q(\alpha_q-\beta_q)=(-1)^n\mu_n+\mu_{-1}$

由 $\mu_n=\mu_{-1}=0$，因此 $\chi(K)-\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\beta_q=0$，即 $\chi(K)=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\beta_q$。

$H_q(K)$ 是由多面体 $|K|$ 的拓扑所决定的。因此 $\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\beta_q$ 是 $|K|$ 的拓扑不变量。另一方面，α_q 是由 K 决定的，从定义上看 $\chi(K)$ 是由 K 的组合结构决定的。Euler—Poicaré 定理说明了 $\chi(K)$ 与剖分 K 的选择无关，它实质上反映了 $|K|$ 的拓扑性质。常见图形的 Euler 示性数如下表：

K	S^2	T^2	P^2	Klein 瓶	S^n	D^n	Möbius 带
$\chi(K)$	2	0	1	0	$1+(-1)^n$	1	0

由于闭曲面的 Euler 示性数及其是否可以定向(二者结合在一起)是闭曲面拓扑分类的标志，利用 Euler 示性数的拓扑不变性还可以区分不同胚的可定向空间，例如 $S^2\not\cong T^2$。

习　题

1. 多边形的边数为 n，已知它是从一个顶点所能引的对角线的 m 倍，写出 n 与 m 的关系式，m 能取哪些值？相应的多边形是几边的？

2. R^3 中的紧致曲面 M，如果它的高斯曲率 $K\geqslant0$，证明它的亏

格 $g=0$,即同胚于一球面。

3. M 是一紧致曲面,证明 $\int_M KdA = 2\pi\chi(M)$(注意,本公式把微分几何内蕴量 K 和拓扑不变量 $\chi(M)$ 联系起来了,即 $\int_M KdA$ 在同胚映射下是不变的)。

4. 正方形有四个顶点、四条棱、一个二维面;三维正方体有8个顶点、12条棱、6个面、一个三维体。试问四维空间中,4正方体有几个顶点、几条棱、几个二维面、几个三维体、几个四维体?

附录 关于群的补充知识

群是在集合 G 上定义了一个结合法(乘法)的代数结构。乘法的具体定义并不重要,重要的是定义中的4个条件:封闭性、结合律、单位元和逆元。具体的群是研究不完的,故讨论一般的群。任何一个群都同构于某一个变换群(Cayley 定理)。每一个有限群都与一个置换群同构。对群的研究方法是分类:有限群、无限群、交换群、非交换群,而循环群是完全解决了的一类群。

1 循环群

若一个群 G 的每一元都是 G 的某一固定元 a 的乘方,G 叫做循环群,即 G 是由 a 生成的,记作:$G=(a)$,a 叫做 G 的一个生成元。

例1 考察整数加群 Z,对任意正整数 m:$m=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{m}=\overbrace{1\circ 1\circ\cdots\circ 1}^{m}=1^m$, $-m=\overbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}^{m}=\overbrace{(-1)\circ(-1)\circ\cdots\circ(-1)}^{m}=(-1)^m=(1^{-1})^m=1^{-m}$,而 $0=1^0$,$\therefore Z=(1)$。

例 2　考察全体整数。取固定的 $n>0$,规定等价关系 R:$aRb \Leftrightarrow n \mid a-b$,这个等价关系叫做模 n 的同余关系,记作 $a \equiv b(n)$,即 a 同余 b 模 n,利用这个等价关系将全体整数分类,得出来的类叫做模 n 的剩余类:

$$[0],[1],\cdots,[n-1]$$

规定 $[a]+[b]=[a+b]$,则对于这个加法,全体剩余类作成一个群:模 n 的剩余类加群,它是循环群,因为 $[1]$ 是它的一个生成元。

以上给了两种循环群,它们包括了所有的循环群。即有定理:

定理　循环群 $G=(a)$,那么 G 的构造完全由 a 的阶来决定:

a 的阶若是无限的,那么 G 与整数加群同构;a 的阶若是一个有限整数 n,那么 G 与模 n 的剩余类加群同构。

注:群 G 的一个元 a,使 $a^m=e$(单位元)的最小正整数 m 叫做元 a 的阶,m 最小的含义是:若 $a^r=e$,则 $m \mid r$,例如,$a^r=e$,必有 $r=2n$,则 a 的阶为 2。若这样的 m 不存在,称 a 的称是无限。例如对整数加群,0 为单位元:若 $a \neq 0$,$na=0$ 当且仅当 $n=0$,a 的阶无限。

2　子群　群的同态

利用群 G 的子群也可用来推测 G 的性质。

定义　设 a 为群的一个固定元素,H 为 G 的子群,当 h 遍历子群 H 的所有元素时,元素 ah 的集合称为 H 的一个左陪集:$aH=\{ah \mid h \in H, a \in G$ 为固定元素$\}$。同样可定义右陪集:$Ha=\{ha \mid h \in H, a \in G$ 为固定元素$\}$。

对有限群 G,$G=H+a_2H+\cdots+a_rH$ 表示不相交的陪集 H、a_2H、…、a_rH 的并称为 G 按子群 H 的左分解,左陪集的个数 r 称为 H 在 G 中的指数。于是群的阶数 = 子群的阶数 × 不同左陪集的个数 (Lagrange 定理)。上述考虑对右陪集也成立。

下面考虑最重要的子群——正规子群。

定义　a、$b \in G$，如果 G 中有一元素 x，使 $xax^{-1} = b$，称 b 与 a 共轭（b 是 a 的 x 变形）。

定义　H 为群 G 的子群，$g \in G$ 为固定元素，所有的乘积 ghg^{-1} 的集合：$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$ 是 G 的一个子群（H 的共轭子群或相似子群）。如果对 G 的任何元素 g 都有 $gHg^{-1} = H$，则称 H 为 G 的正规子群（不变子群）。

正规子群 N 有以下性质：

①$g \in G$，则 N 的左右陪集相等：$gN = Ng$（$\because gNg^{-1} = N$，$\therefore gN = Ng$）

② 如果正规子群 N 含有元素 a，则 N 必含有 a 所属的共轭类 $[a] = \{b | b = xax^{-1}, x \in G\}$ 反之，如果子群 N 具有这个性质，则 N 必为正规子群。

设 N 是 G 的一个正规子群，N 的左陪集全体记为 G/N，对任意的 aN、$bN \in G/N$，定义 $(aN)(bN) = (ab)N$，则 G/N 也做成一个群：G 的商群。映射 $\pi: G \to G/N, a \to aN$ 是一个满同态。

两个群的同态或同构反映了群的外部关系，它是近世代数中头等重要的概念。

定义　如果从群 G 到群 G' 有一个对应 ρ，满足 $\rho(a \circ b) = \rho(a) o \rho(b)$，$\forall a$、$b \in G$，则称 ρ 为从 G 到 G' 的同态。若 ρ 为一一对应，ρ 为同构。我们对同构的群不加区别，即精确到同构，它是比较两个群最有效的工具，它们之间的不同是受外来影响产生的。

同态对元素的约束性体现在：

定理　在群 G 到 G' 的同态 φ 之下，$\varphi(e) = e'$，$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$，由此可知，同态像 $\varphi(G)$ 是 G' 的一个子群。

定理　在群 G 到 G' 的同态 φ 之下，G 中所有适合条件 $\varphi(x) = e'$ 的元素的集合 $k_r\varphi = \varphi^{-1}(e')$ 是 G 中的一个正规子群，称为同态对应 φ 的核。此时，有

$$G/k_r\varphi \cong \varphi(G)。$$

3　交换群

以下只限于讨论交换群，群的运算用“+”，单位元用0(零元)，x 的逆元为 $-x$。

H 为群 G 的一个非空子集，H 是 G 的子群，当且仅当 H 满足：①x、$y \in H \Rightarrow x+y \in H$；②$x \in H \Rightarrow -x \in H$。例如，群 G 的所有有限阶的元素组成一个子群，叫做 G 的挠子群。

H 为群 G 的一个子群，若 $x, y \in G$，且 $x-y \in H$，称 x 与 y 模 H 等价：$x \equiv y$(模 H)，模 H 等价这个关系为等价关系，x, y 在同一等价类 $\Leftrightarrow x \equiv y$(模 H)。考虑 G 的所有模 H 等价类 x^* 所组成的新集合 $\{x^* \mid x \in G\}$。定义 $x^* + y^* = (x+y)^*$，得到一个群 G/H——G 对 H 的商群。G/H 是交换群，等价类 H 作为商群的一元时，是商群的零元。特别地，$H = \{0\}$ 时，G/H 就是 G。

设 $f: G \to G'$ 为同态，H 是 G 的一个子群 $\Rightarrow f(H)$ 是 G' 的一个子群；H' 是 G' 的一个子群 $\Rightarrow f^{-1}(H')$ 是 G 的一个子群。特别地，$f(G)$ 是 G' 的一个子群，称为同态 f 的像群。$f^{-1}(0)$ 是 G 的一个子群，称为同态 f 的核。

若 $f: G \to G'$ 同态，且 $f(G) = G'$，f 为满同态。若 $f^{-1}(0) = 0$，f 为单一同态，且 f 为单一同态 $\Leftrightarrow x \neq y$ 时 $f(x) \neq f(y)$，$x, y \in G$。若 $f(G) = 0$，则 f 为零同态。

对于 G 的商群 G/H，定义 $f(x) = x^*$，则 f 为满同态，称为 G 到 G/H 的自然同态。对于 $t: G \to G/H$ 和 $t': G' \to G'/H'$，对 $f: G \to G'$ 为同态，则 $\tilde{f}: G/H \to G'/H'$ 为同态(f 诱导的同态)且有下列图表的交换性。

$$t' \circ f = \tilde{f} \circ t$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ t \downarrow & & \downarrow t' \\ G/H & \xrightarrow{\bar{f}} & G'/H' \end{array}$$

如果同态 $f: G \to G'$ 把群 G 一一地映满 G'，f 叫作一个同构映射。

设群 $H_i \subset$ 群 $G, i = 1,2,\cdots,n$，如果 G 的每一元 x 都可以用下列方式唯一表出：$x = y_1 + y_2 + \cdots + y_n, y_i \in H_i$，则称 G 为 H_i 的直和，或将 G 分解为 H_i 的直和：$G = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$，$H_i$ 称为 G 的直和项。下面给出直和的另一等价定义。

设 H_i 是群 $(i = 1,2,\cdots,n)$，构造群 G^0，其元素集合为 $\{(y_1,\cdots,y_n) \mid y_i \in H_i\}$，其中的加法定义为：$(y_1,\cdots,y_n) + (y_1',\cdots,y_n') = (y_1 + y_1',\cdots,y_n + y_n')$。$G^0$ 的子集 $\{(0,\cdots,0,y_i,0,\cdots,0) \mid y_i \in H_i\}$ 组成 G^0 的子群 H_i^0，则 $H_i^0 \cong H_i$ 且 $G^0 = H_1^0 \oplus \cdots \oplus H_n^0$，$f: (y_1,\cdots,y_n) \to y_1 + \cdots + y_n$ 为 G^0 到 G 的同构，在同构 f 下，$H_i^0 \cong H_i$。例如，G 的集合是 $\{(x,y) \mid x,y \in R\}$ 其中的加法是 $(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$，$G = H_1 \oplus H_2$，其中 $H_1 = \{(x,0) \mid x \in R\}$，$H_2 = \{(0,y) \mid y \in R\}$，本例有明显的几何意义。

将 G 分解为 H_i 的直和，就可将 G 的结构的研究转化为 H_i 的结构的研究，G 的结构的研究就简化了。

设 H_1, H_2 是群 G 的子群，且 G 的每一元 x 至少有一个如下的表示：$x = y_1 + y_2, y_1 \in H_1, y_2 \in H_2$，则 $G = H_1 \oplus H_2 \Leftrightarrow H_1 \cap H_2 = 0$（$G$ 的零元）。

如果 $G = H_1 \oplus H_2$，则 $G/H_1 \cong H_2$。设 $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$，$H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$，则 $G/H \cong G_1/H_1 \oplus \cdots \oplus G_n/H_n$。

若 $\{x_i\}$ 为群 G 的一组元素，$i = 1,2,\cdots,r$，如果存在一组不全

为零的整数$\{\lambda_i\}$,使得$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0$($G$的零元),称这组元素$\{x_i\}$线性相关,否则叫作线性无关。如果$G$中含有某一组$r$个线性无关元素$\{x_i\}$,但$\forall x \in G$,$\{x_i, x\}$都线性相关,则称这一组$\{x_i\}$叫作$G$的一个极大无关组,对于$G$的两个极大无关组,其元素个数必然相等,均为$r$,并称$G$的秩为$r$,记作$\rho(G) = r$,例如,如果群$G$的每一元$x$的阶数$m$(使$mx = 0$的最小正整数$m$)都有限,则$\rho(G) = 0$;有理数加群的秩是1。对整数加群$Z$(无穷循环群),直和$Z \oplus \cdots \oplus Z$的秩为$n$,其极大无关组为:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}。$$

进一步,n个无穷循环群与m个有限阶的循环群的秩还是n。显然,同构的群的秩相同,这说明秩是群的结构的一个特征。

若H是G的一个子群,则$\rho(G) = \rho(H) + \rho(G/H)$(秩的可加性)。

4 有限维的自由群

X为交换群G的一组元素,G的每一元x至少有如下的表示:$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$,其中$m$为有限,$x_i \in X$,$\lambda_i$为整数,则$X$叫作$G$的一组生成元,若$X$元素个数有限,$G$叫作有限生成的群。如果$X$这组生成元线性无关,$X$叫作$G$的一个基,基的元素的个数叫作$G$的维数,而且$G$叫作一个有限维的自由群。

例如,循环群只有一个生成元:$G = (a)$,a是G的生成元。Z是由1生成的无限循环群,1是基,所以一维的自由群是Z。模n的剩余类加群$G = \{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$是由[1]生成的有限循环群,但[1]不是$G$的基。有理数加群不是有限生成的,因而不是有限维的自由群。

显然，m 维自由群 G 的每一非零元的阶无限；G 的秩为 m，两个有限维的自由群同构 $\Leftrightarrow$ 它们的维数相等。

m 维自由群的任一子群还是一个有限维的自由群，而且它的维数 $\leqslant m$。

对于有限生成的群 G，如果它具有 m 个生成元，而且 H 是 G 的任一子群，则商群 G/H 也具有 m 个生成元。

定理(有限生成的交换群的基本定理)　G 是有限生成的交换群，则有下述同构：

$$G \cong \underbrace{Z \oplus \cdots \oplus Z}_{r个} + Z_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus Z_{\theta_\tau}$$

其中 r 称为 G 的秩，诸 θ_i 称为挠系数。当 $\tau > 0$ 时，整数 $\theta_1 > 1$，θ_i 整除 θ_{i+1}。上述分解称为 G 的标准分解，r、θ_1、$\cdots$、θ_τ 是群 G 的不变量完全组，即 G 的任意两个标准分解都有相同的秩和挠系数。

参考书目

1.H沙爱福,W施雷发．拓扑学．北京:人民教育出版社,1982

2.江泽涵．拓扑学引论．上海:上海科学技术出版社,1978

3.詹汉生．微分流形导引．北京:北京大学出版社,1987

4.陈省身．陈维桓．微分几何讲义．北京:北京大学出版社,1983

5.陈维桓．微分流形初步．北京:高等教育出版社,1998

6.张筑生．微分拓扑讲义．北京:北京大学出版社,1996

7.徐森林．薛春华．流形．北京:高等教育出版社,1991

8.熊金城．点集拓扑讲义．北京:人民教育出版社,1981

9.M.A.阿姆斯壮格．基础拓扑学．北京:北京大学出版社,1983

10.龙承业．基础拓扑学讲义．北京:北京大学出版社,1997

11.A. Mishchenko, A. Fomenko. A course of differential geometry and topology. Moscow: Mir publishers, 1988

12.M. W. Hirsch. Differential topology. GTM33, New York: Springer – Verlag, 1976

13.V. I. Arnold. Mathematical methods of Classical Mechanics. GTM60, New York: Springer – Verlag, 1988

14.G. de Rham. Differential manifolds. New York: Springer – Verlag, 1984

15.F. W. Warner. Foundations of differential manifolds and Lie groups. GTM94, New York: Springer – Verlag, 1983

16.H Whitney. Geometry integration theory. Princeton University Press, 1957

17. S. Helgason. Differential geometry, Lie groups, and Symmetric spaces. New York: Academic Press, INC, 1978

18. I. Chavel. Riemannian geometry - A modern introduction. Cambridge: Cambridge university Press, 1993

19. 项武义,侯自新,孟道骥. 李群讲义. 北京:北京大学出版社,1992

20. James R. Munkred. 拓扑学基本教程. 北京:科学出版社, 1987

21. 方嘉琳. 点集拓扑学. 沈阳:辽宁人民出版社,1983

22. 王敬庚. 直观拓扑. 北京:北京师范大学出版社,1995

[General Information]
□□=□□□□□
□□=□□□□□□□□
□□=255
SS□=13399549
DX□=
□□□□=2002.02
□□□=□□□□□□□

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] [illegible]
1 [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible]
4 [illegible]
5 [illegible]
[illegible] [illegible]
1 [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible]
4 [illegible]
5 [illegible]
6 [illegible]
7 [illegible]
[illegible] [illegible]
1 [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible]
4 [illegible]
[illegible] [illegible]
1 [illegible]